THEORIE DER SONNENFINSTERNISSE,
DER DURCHGÄNGE
DER UNTEREN PLANETEN VOR DER SONNE
UND DER
STERNBEDECKUNGEN FÜR DIE ERDE ÜBERHAUPT.

VON J. A. GRUNERT,
CORRESPONDIRENDEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

(VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM XII. OCTOBER MDCCCLIV.)

Erstes Capitel.
Über die Ebene, welche durch eine der Lage nach gegebene gerade Linie im Raume geht.

I.
Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie durch zwei gegebene Punkte im Raume bestimmt ist.

§. 1.

Ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde legend, wollen wir die Coordinaten der beiden gegebenen Punkte, durch welche die Lage der gegebenen geraden Linie im Raume bestimmt wird, durch f, g, h und f_1, g_1, h_1 bezeichnen, und wollen nun zuerst die Gleichung der durch diese beiden Punkte und den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene suchen, welche bekanntlich im Allgemeinen die Form

$$1)\qquad \mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0$$

hat.

Da diese Ebene durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ gehen soll, so haben wir die beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A}f + \mathfrak{B}g + \mathfrak{C}h = 0,$$
$$\mathfrak{A}f_1 + \mathfrak{B}g_1 + \mathfrak{C}h_1 = 0;$$

aus denen sich leicht

$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{A} - (gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{B} = 0,$$
$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{B} - (hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{C} = 0,$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{C} - (fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{A} = 0$$

oder

$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{A} = (gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{B},$$
$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{B} = (hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{C},$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{C} = (fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{A},$$

ergiebt. Bezeichnen wir jetzt die Gleichungen der Projectionen der durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ gehenden geraden Linie auf den Ebenen der xy, yz, zx respective durch

$$\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{B}_1 y + \mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{B}_2 z + \mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_3 z + \mathfrak{B}_3 x + \mathfrak{C}_3 = 0;$$

so ist

$$\mathfrak{A}_1 f + \mathfrak{B}_1 g + \mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_2 g + \mathfrak{B}_2 h + \mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_3 h + \mathfrak{B}_3 f + \mathfrak{C}_3 = 0$$

und

$$\mathfrak{A}_1 f_1 + \mathfrak{B}_1 g_1 + \mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_2 g_1 + \mathfrak{B}_2 h_1 + \mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$\mathfrak{A}_3 h_1 + \mathfrak{B}_3 f_1 + \mathfrak{C}_3 = 0;$$

also, wie man hieraus leicht findet:

$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{A}_1 - (g - g_1)\,\mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{A}_2 - (h - h_1)\,\mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{A}_3 - (f - f_1)\,\mathfrak{C}_3 = 0$$

und

$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{B}_1 + (f - f_1)\,\mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{B}_2 + (g - g_1)\,\mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{B}_3 + (h - h_1)\,\mathfrak{C}_3 = 0,$$

so wie

$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{A}_1 - (gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{B}_1 + (h - h_1)\,\mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{A}_2 - (hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{B}_2 + (f - f_1)\,\mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{A}_3 - (fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{B}_3 + (g - g_1)\,\mathfrak{C}_3 = 0.$$

Wäre nun zugleich

$$fg_1 - gf_1 = 0, \quad gh_1 - hg_1 = 0, \quad hf_1 - fh_1 = 0,$$

so wäre nach den vorhergehenden Gleichungen:

$$(f - f_1)\,\mathfrak{C}_1 = (g - g_1)\,\mathfrak{C}_1 = (h - h_1)\,\mathfrak{C}_1 = 0,$$
$$(f - f_1)\,\mathfrak{C}_2 = (g - g_1)\,\mathfrak{C}_2 = (h - h_1)\,\mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$(f - f_1)\,\mathfrak{C}_3 = (g - g_1)\,\mathfrak{C}_3 = (h - h_1)\,\mathfrak{C}_3 = 0.$$

Fallen also, was hier nothwendig vorausgesetzt werden muss, die beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ nicht zusammen, so ist nicht zugleich

$$f - f_1 = 0, \quad g - g_1 = 0, \quad h - h_1 = 0;$$

folglich nach dem Obigen:

$$\mathfrak{C}_1 = 0, \quad \mathfrak{C}_2 = 0, \quad \mathfrak{C}_3 = 0;$$

also sind die Gleichungen der Projectionen der durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ gehenden geraden Linie auf den Ebenen der xy, yz, zx respective:

$$\mathfrak{A}_1 x + \mathfrak{B}_1 y = 0\,,$$
$$\mathfrak{A}_2 y + \mathfrak{B}_2 z = 0\,,$$
$$\mathfrak{A}_3 z + \mathfrak{B}_3 x = 0\,;$$

woraus sich ergiebt, dass unter der gemachten Voraussetzung, — unter der Voraussetzung nämlich, dass zugleich

$$fg_1 - gf_1 = 0\,,\quad gh_1 - hg_1 = 0\,,\quad hf_1 - fh_1 = 0$$

sei, — diese drei Projectionen durch den Anfang der Coordinaten gehen, und dass also unter der in Rede stehenden Voraussetzung auch die durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ der Lage nach bestimmte gerade Linie selbst durch den Anfang der Coordinaten geht, ein specieller Fall, den wir von allen unseren folgenden Betrachtungen ausschliessen werden, und desshalb auch zu der Annahme berechtigt sind, dass nicht zugleich

$$fg_1 - gf_1 = 0\,,\quad gh_1 - hg_1 = 0\,,\quad hf_1 - fh_1 = 0$$

sei.

Nehmen wir nun beispielsweise an, dass nicht

$$fg_1 - gf_1 = 0$$

sei, und setzen

$$\mathfrak{C} = \lambda(fg_1 - gf_1),$$

wo λ einen gewissen Factor bezeichnet, so ergiebt sich aus der zweiten und dritten der drei folgenden aus dem Obigen bekannten Gleichungen:

$$(hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{A} = (gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{B}\,,$$
$$(fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{B} = (hf_1 - fh_1)\,\mathfrak{C}\,,$$
$$(gh_1 - hg_1)\,\mathfrak{C} = (fg_1 - gf_1)\,\mathfrak{A}$$

auf der Stelle:

$$\mathfrak{B} = \lambda(hf_1 - fh_1)\,,\quad \mathfrak{A} = \lambda(gh_1 - hg_1)\,;$$

also überhaupt:

$$\mathfrak{A} = \lambda(gh_1 - hg_1)\,,\quad \mathfrak{B} = \lambda(hf_1 - fh_1)\,,\quad \mathfrak{C} = \lambda(fg_1 - gf_1).$$

Wäre nun $\lambda = 0$, so wäre

$$\mathfrak{A} = 0\,,\quad \mathfrak{B} = 0\,,\quad \mathfrak{C} = 0\,,$$

was offenbar ungereimt ist, so lange, wie wir hier natürlich annehmen, die Gleichung

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0$$

irgend einer bestimmten Ebene entspricht, indem natürlich die Gleichung

$$0\,.\,x + 0\,.\,y + 0\,.\,z = 0 \text{ oder } 0 = 0$$

eine bestimmte Ebene gar nicht charakterisiren kann. Also ist nicht $\lambda = 0$, und weil nun nach dem Obigen die Gleichung der durch die Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ und durch den Anfang der Coordinaten gehenden Ebene, d. h. die Gleichung der Ebene, welche durch die gerade Linie, deren Lage durch die Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ bestimmt wird, und durch den Anfang der Coordinaten geht,

$$\lambda(gh_1 - hg_1)\,x + \lambda(hf_1 - fh_1)\,y + \lambda(fg_1 - gf_1)\,z = 0$$

ist, so ist diese Gleichung, wenn man durch das nicht verschwindende λ dividirt:

2) $$(gh_1 - hg_1)\,x + (hf_1 - fh_1)\,y + (fg_1 - gf_1)\,z = 0,$$

und es kann daher

$$3)\qquad \mathfrak{A}=gh_1-hg_1,\quad \mathfrak{B}=hf_1-fh_1,\quad \mathfrak{C}=fg_1-gf_1$$

gesetzt werden.

Weil die in Rede stehende Ebene durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ geht, so hat man nach 2) die beiden folgenden Relationen:

$$4)\qquad \begin{cases} f(gh_1-hg_1)+g(hf_1-fh_1)+h(fg_1-gf_1)=0, \\ f_1(gh_1-hg_1)+g_1(hf_1-fh_1)+h_1(fg_1-gf_1)=0; \end{cases}$$

deren Richtigkeit übrigens auch sogleich ganz von selbst in die Augen fällt, und die Gleichung unserer Ebene kann daher auch unter einer der beiden folgenden Formen dargestellt werden:

$$5)\qquad \begin{cases} (gh_1-hg_1)(x-f)+(hf_1-fh_1)(y-g)+(fg_1-gf_1)(z-h)=0, \\ (gh_1-hg_1)(x-f_1)+(hf_1-fh_1)(y-g_1)+(fg_1-gf_1)(z-h_1)=0. \end{cases}$$

§. 2.

Die Gleichung einer anderen beliebigen Ebene, welche durch die gerade Linie, die der Lage nach durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ bestimmt wird, gelegt ist, aber nicht durch den Anfang der Coordinaten geht, sei

$$6)\qquad Ax+By+Cz+D=0.$$

Weil nach der Voraussetzung diese Ebene nicht durch den Anfang der Coordinaten geht, so verschwindet D nicht, und wir können also vorstehende Gleichung unter der Form

$$\frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z+1=0$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$7)\qquad u=\frac{A}{D},\quad v=\frac{B}{D},\quad w=\frac{C}{D}$$

gesetzt wird, unter der Form

$$8)\qquad ux+vy+wz+1=0$$

darstellen. Weil die in Rede stehende Ebene durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ geht, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$9)\qquad \begin{cases} uf+vg+wh+1=0, \\ uf_1+vg_1+wh_1+1=0; \end{cases}$$

und können also die Gleichung unserer Ebene auch unter einer der beiden folgenden Formen darstellen:

$$10)\qquad \begin{cases} u(x-f)+v(y-g)+w(z-h)=0, \\ u(x-f_1)+v(y-g_1)+w(z-h_1)=0. \end{cases}$$

Bringen wir die drei Gleichungen 8) und 9) auf die Form:

$$\begin{aligned} fu+gv+hw+1&=0, \\ f_1u+g_1v+h_1w+1&=0, \\ xu+yv+zw+1&=0 \end{aligned}$$

und multipliciren dieselben dann nach der Reihe mit

$$g_1z-h_1y,\quad hy-gz,\quad gh_1-hg_1;$$

so erhalten wir:

$$f\,(g_1 z - h_1 y)\,u + g\,(g_1 z - h_1 y)\,v + h\,(g_1 z - h_1 y)\,w + g_1 z - h_1 y = 0,$$
$$f_1 (hy - gz)\,u + g_1 (hy - gz)\,v + h_1 (hy - gz)\,w + hy - gz = 0,$$
$$x\,(gh_1 - hg_1)\,u + y\,(gh_1 - hg_1)\,v + z\,(gh_1 - hg_1)\,w + gh_1 - hg_1 = 0.$$

Addiren wir nun diese drei Gleichungen zu einander, so ergiebt sich:

$$11)\quad \left.\begin{array}{l} (gh_1 - hg_1)\,ux \\ + \{h - h_1 + (hf_1 - fh_1)\,u\}\,y \\ - \{g - g_1 - (fg_1 - gf_1)\,u\}\,z \\ + gh_1 - hg_1 \end{array}\right\} = 0,$$

welches die Gleichung unserer Ebene sein wird. Daher können wir setzen:

$$12)\quad \left\{\begin{array}{l} A = \quad (gh_1 - hg_1)\,u, \\ B = \quad (h - h_1) + (hf_1 - fh_1)\,u, \\ C = -(g - g_1) + (fg_1 - gf_1)\,u, \\ D = \quad gh_1 - hg_1. \end{array}\right.$$

Dass die Gleichung 11) und die Ausdrücke 12) die willkürliche Grösse u enthalten, entspricht ganz der Natur der Sache, da ja unsere Ebene, ausser dass sie durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ und nicht durch den Anfang der Coordinaten gehen soll, sonst ganz willkürlich ist.

Übrigens erhellet auf der Stelle, dass man die Gleichung unserer Ebene auch unter einer der beiden folgenden Formen darstellen kann:

$$13)\quad \left.\begin{array}{l} (gh_1 - hg_1)\,u\,(x - f) \\ + \{h - h_1 + (hf_1 - fh_1)\,u\}\,(y - g) \\ - \{g - g_1 - (fg_1 - gf_1)\,u\}\,(z - h) \end{array}\right\} = 0$$

und

$$14)\quad \left.\begin{array}{l} (gh_1 - hg_1)\,u\,(x - f_1) \\ + \{h - h_1 + (hf_1 - fh_1)\,u\}\,(y - g_1) \\ - \{g - g_1 - (fg_1 - gh_1)\,u\}\,(z - h_1) \end{array}\right\} = 0.$$

§. 3.

Bezeichnen wir jetzt den Winkel, welchen die im vorhergehenden Paragraphen betrachtete Ebene 6) mit der durch die Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ und den Anfang der Coordinaten gelegten Ebene einschliesst, ohne für jetzt eine Bestimmung zu geben, wie dieser Winkel genommen werden soll, im Allgemeinen durch ω, und setzen der Kürze wegen

$$T = \mathfrak{A}A + \mathfrak{B}B + \mathfrak{C}C$$

und

$$P = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2, \quad Q = A^2 + B^2 + C^2;$$

so ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos\,\omega^2 = \frac{TT}{PQ}.$$

Führt man aber für

$$\mathfrak{A},\ \mathfrak{B},\ \mathfrak{C} \text{ und } A,\ B,\ C$$

ihre Werthe aus dem Obigen ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}T= &-\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\\ &+\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}u,\\ P= &\quad (fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2,\\ Q= &\quad (g-g_1)^2+(h-h_1)^2\\ &-2\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}u\\ &+\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}u^2;\end{aligned}$$

und setzt man nun noch der Kürze wegen

$$\begin{aligned}S&=(g-g_1)^2+(h-h_1)^2,\\ U&=(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1);\end{aligned}$$

so ist

$$T=-U+Pu,\quad Q=S-2Uu+Pu^2;$$

also

$$\cos\omega^2=\frac{(U-Pu)^2}{P(S-2Uu+Pu^2)},$$

und die Gleichung zur Bestimmung von u aus ω ist folglich:

$$P(S-2Uu+Pu^2)\cos\omega^2=(U-Pu)^2$$

oder

$$P(S-2Uu+Pu^2)\sin\omega^2=P(S-2Uu+Pu^2)-(U-Pu)^2,$$

also

$$P(S-2Uu+Pu^2)\sin\omega^2=PS-U^2,$$

woraus

$$u^2-2\frac{U}{P}u=\frac{PS-U^2}{P^2\sin\omega^2}-\frac{S}{P}$$

folgt. Hieraus ergiebt sich

$$\left(u-\frac{U}{P}\right)^2=\frac{PS-U^2}{P^2}\cot\omega^2.$$

Es ist aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}PS-U^2&=(g-g_1)^2\{(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}\\ &+(h-h_1)^2\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2\}\\ &+2(g-g_1)(h-h_1)(fg_1-gf_1)(hf_1-fh_1)\\ &=(gh_1-hg_1)^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}\\ &-(f-f_1)^2(gh_1-hg_1)^2\\ &+\{(g-g_1)(hf_1-fh_1)+(h-h_1)(fg_1-gf_1)\}^2,\end{aligned}$$

also, weil offenbar die Relation

$$(f-f_1)(gh_1-hg_1)+(g-g_1)(hf_1-fh_1)+(h-h_1)(fg_1-gf_1)=0$$

Statt findet[1]):

$$PS-U^2=(gh_1-hg_1)^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\},$$

---

[1]) Alle in dieser Abhandlung zur Anwendung kommenden Relationen sind in einem besonderen Anhange zu derselben zusammengestellt worden, und dort aufzusuchen, wenn sie gebraucht werden, was hier ein- für allemal bemerkt wird.

oder, wenn wir

15) $$E = \sqrt{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2}$$

setzen, wo E die Entfernung der beiden Punkte (fgh) und $(f_1 g_1 h_1)$ von einander bezeichnet:

$$PS - U^2 = (gh_1 - hg_1)^2 E^2.$$

Daher ist nach dem Obigen:

$$\left(u - \frac{U}{P}\right)^2 = \frac{(gh_1 - hg_1)^2 E^2}{P^2} \cot \omega^2,$$

woraus

$$u = \frac{U \sin \omega \pm (gh_1 - hg_1) E \cos \omega}{P \sin \omega}$$

folgt.

Also ist nach 12):

$$A = (gh_1 - hg_1) \frac{U \sin \omega \pm (gh_1 - hg_1) E \cos \omega}{P \sin \omega}.$$

Setzt man jetzt überhaupt

16) $$\begin{cases} U = (g-g_1)(fg_1 - gf_1) - (h-h_1)(hf_1 - fh_1), \\ V = (h-h_1)(gh_1 - hg_1) - (f-f_1)(fg_1 - gf_1), \\ W = (f-f_1)(hf_1 - fh_1) - (g-g_1)(gh_1 - hg_1); \end{cases}$$

so überzeugt man sich leicht von der Richtigkeit der folgenden Relationen:

17) $$\begin{cases} (f-f_1) P = (hf_1 - fh_1) W - (fg_1 - gf_1) V, \\ (g-g_1) P = (fg_1 - gf_1) U - (gh_1 - hg_1) W, \\ (h-h_1) P = (gh_1 - hg_1) V - (hf_1 - fh_1) U. \end{cases}$$

Weil nach der dritten und zweiten dieser Relationen

$$(h-h_1) P + (hf_1 - fh_1) U = (gh_1 - hg_1) V,$$
$$-(g-g_1) P + (fg_1 - gf_1) U = (gh_1 - hg_1) W$$

ist, so erhält man mittelst des obigen Ausdruckes von u und der Formeln 12), in Verbindung mit dem schon vorher gefundenen Werthe von A, leicht:

$$A = (gh_1 - hg_1) \frac{U \sin \omega \pm (gh_1 - hg_1) E \cos \omega}{P \sin \omega},$$
$$B = (gh_1 - hg_1) \frac{V \sin \omega \pm (hf_1 - fh_1) E \cos \omega}{P \sin \omega},$$
$$C = (gh_1 - hg_1) \frac{W \sin \omega \pm (fg_1 - gf_1) E \cos \omega}{P \sin \omega},$$
$$D = gh_1 - hg_1;$$

wo natürlich die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen. Offenbar ist es aber verstattet, aus diesen sämmtlichen Ausdrücken den gemeinschaftlichen Factor $gh_1 - hg_1$ wegzulassen, und dieselben dann sämmtlich mit $P \sin \omega$ zu multipliciren, so dass man also kürzer auch setzen kann:

18) $$\begin{cases} A = U \sin \omega \pm (gh_1 - hg_1) E \cos \omega, \\ B = V \sin \omega \pm (hf_1 - fh_1) E \cos \omega, \\ C = W \sin \omega \pm (fg_1 - gf_1) E \cos \omega, \\ D = P \sin \omega. \end{cases}$$

Dass nun aber hierunter auch der Fall begriffen ist, wenn die durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ gelegte Ebene durch den Anfang der Coordinaten geht, fällt auf der Stelle in die Augen, weil in diesem Falle $\sin\omega = 0$, $\cos\omega = \pm 1$ ist, also die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

wo A, B, C, D die obigen Werthe haben, offenbar mit der Gleichung

$$\mathfrak{A}x + \mathfrak{B}y + \mathfrak{C}z = 0$$

zusammenfällt, oder wenigstens sogleich in dieselbe übergeht, wenn man die Zeichen aller Glieder mit den entgegengesetzten vertauscht, was natürlich verstattet ist.

Um nun aber alle Ebenen zu erhalten, welche sich durch die gerade Linie legen lassen, die durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ der Lage nach bestimmt wird, braucht man in den Formeln 18) den Winkel ω nicht grösser als 180° werden zu lassen. Denn wenn man in diesen Formeln $180° + \omega$ für ω setzt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A &= -U\sin\omega \mp (gh_1 - hg_1)E\cos\omega,\\
B &= -V\sin\omega \mp (hf_1 - fh_1)E\cos\omega,\\
C &= -W\sin\omega \mp (fg_1 - gf_1)E\cos\omega,\\
D &= -P\sin\omega;
\end{aligned}$$

was, da man A, B, C, D offenbar sämmtlich mit -1 multipliciren kann, wieder dieselbe Ebene giebt, welche

$$\begin{aligned}
A &= U\sin\omega \pm (gh_1 - hg_1)E\cos\omega,\\
B &= V\sin\omega \pm (hf_1 - fh_1)E\cos\omega,\\
C &= W\sin\omega \pm (fg_1 - gf_1)E\cos\omega,\\
D &= P\sin\omega
\end{aligned}$$

gaben. Setzt man aber ferner in den Ausdrücken

$$\begin{aligned}
A &= U\sin\omega + (gh_1 - hg_1)E\cos\omega,\\
B &= V\sin\omega + (hf_1 - fh_1)E\cos\omega,\\
C &= W\sin\omega + (fg_1 - gf_1)E\cos\omega\\
D &= P\sin\omega
\end{aligned}$$

$180° - \omega$ für ω, so erhält man:

$$\begin{aligned}
A &= U\sin\omega - (gh_1 - hg_1)E\cos\omega,\\
B &= V\sin\omega - (hf_1 - fh_1)E\cos\omega,\\
C &= W\sin\omega - (fg_1 - gf_1)E\cos\omega,\\
D &= P\sin\omega.
\end{aligned}$$

Hieraus erhellet nun vollständig, dass es, um alle Ebenen zu erhalten, welche sich durch die Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$, oder durch die durch diese Punkte der Lage nach bestimmte gerade Linie legen lassen, völlig hinreicht, in den Formen 18) blos die oberen Zeichen zu nehmen und ω von 0 bis 180° wachsen zu lassen, oder diesen Winkel zwischen 0 und 180° zu nehmen. Wir wollen daher von jetzt an immer setzen:

$$19)\quad \left\{\begin{aligned}
A &= U\sin\omega + (gh_1 - hg_1)E\cos\omega,\\
B &= V\sin\omega + (hf_1 - fh_1)E\cos\omega,\\
C &= W\sin\omega + (fg_1 - gf_1)E\cos\omega.\\
D &= P\sin\omega
\end{aligned}\right.$$

und ω stets zwischen 0 und 180° nehmen.

Weil, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} 0 = (fg_1 - gf_1)\,\{(f-f_1)(hf_1 - fh_1) - (g-g_1)(gh_1 - hg_1)\} \\ + (gh_1 - hg_1)\,\{(g-g_1)(fg_1 - gf_1) - (h-h_1)(hf_1 - fh_1)\} \\ + (hf_1 - fh_1)\,\{(h-h_1)(gh_1 - hg_1) - (f-f_1)(fg_1 - gf_1)\}, \end{aligned}$$

d. i.

$$(gh_1 - hg_1)\,U + (hf_1 - fh_1)\,V + (fg_1 - gf_1)\,W = 0$$

ist, so ist

$$A^2 + B^2 + C^2 = (U^2 + V^2 + W^2)\sin\omega^2 + PE^2\cos\omega^2.$$

Aber, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned} & U^2 + V^2 + W^2 \\ = & \{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\}\,(fg_1 - gf_1)^2 - (h-h_1)^2(fg_1 - gf_1)^2 \\ + & \{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\}\,(gh_1 - hg_1)^2 - (f-f_1)^2(gh_1 - hg_1)^2 \\ + & \{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\}\,(hf_1 - fh_1)^2 - (g-g_1)^2(hf_1 - fh_1)^2 \\ & - 2(f-f_1)(g-g_1)(gh_1 - hg_1)(hf_1 - fh_1) \\ & - 2(g-g_1)(h-h_1)(hf_1 - fh_1)(fg_1 - gf_1) \\ & - 2(h-h_1)(f-f_1)(fg_1 - gf_1)(gh_1 - hg_1) \\ = & PE^2 - \{(f-f_1)(gh_1 - hg_1) + (g-g_1)(hf_1 - fh_1) + (h-h_1)(fg_1 - gf_1)\}^2, \end{aligned}$$

also, weil bekanntlich

$$(f-f_1)(gh_1 - hg_1) + (g-g_1)(hf_1 - fh_1) + (h-h_1)(fg_1 - gf_1) = 0$$

ist,

$$U^2 + V^2 + W^2 = PE^2,$$

folglich nach dem Obigen:

$$A^2 + B^2 + C^2 = PE^2\sin\omega^2 + PE^2\cos\omega^2,$$

also

20) $$A^2 + B^2 + C^2 = PE^2.$$

II.

Wenn die der Lage nach gegebene gerade Linie durch einen gegebenen Punkt geht, und einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

§. 4.

Die Gleichungen einer durch den gegebenen Punkt (fgh) gehenden geraden Linie, welche einer gegebenen geraden Linie parallel ist, haben im Allgemeinen die Form

21) $$\frac{x-f}{\cos\lambda} = \frac{y-g}{\cos\mu} = \frac{z-h}{\cos\nu},$$

wo die Winkel λ, μ, ν durch die gegebene gerade Linie, welcher die durch die vorhergehenden Gleichungen charakterisirte gerade Linie parallel ist, bestimmt und daher, eben so wie die Coordinaten f, g, h, als gegeben zu betrachten sind.

Um nun diesen Fall auf den in I. betrachteten Fall zurückzuführen, wollen wir in der durch die Gleichungen 21) charakterisirten geraden Linie einen beliebigen Punkt $(f_1 g_1 h_1)$ annehmen, wo dann nach den in Rede stehenden Gleichungen

$$\frac{f_1-f}{\cos\lambda}=\frac{g_1-g}{\cos\mu}=\frac{h_1-h}{\cos\nu}$$

ist. Weil aber f_1 ganz beliebig ist, so ist es gestattet,

$$f_1=f-\cos\lambda$$

zu setzen. Dann erhält man aus den obigen Gleichungen überhaupt:

$$\begin{aligned} f_1&=f-\cos\lambda, \quad \text{oder} & f-f_1&=\cos\lambda,\\ g_1&=g-\cos\mu, & g-g_1&=\cos\mu,\\ h_1&=h-\cos\nu; & h-h_1&=\cos\nu. \end{aligned}$$

Also ist:

$$\begin{aligned} fg_1-gf_1&=f(g-\cos\mu)-g(f-\cos\lambda)=-(f\cos\mu-g\cos\lambda),\\ gh_1-hg_1&=g(h-\cos\nu)-h(g-\cos\mu)=-(g\cos\nu-h\cos\mu),\\ hf_1-fh_1&=h(f-\cos\lambda)-f(h-\cos\nu)=-(h\cos\lambda-f\cos\nu); \end{aligned}$$

und folglich:

$$\begin{aligned} U&=\quad(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\\ &=-\cos\mu(f\cos\mu-g\cos\lambda)+\cos\nu(h\cos\lambda-f\cos\nu)\\ &=-f(\cos\mu^2+\cos\nu^2)+(g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\lambda\\ &=-f+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\lambda,\\ V&=-(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\\ &=-\cos\nu(g\cos\nu-h\cos\mu)+\cos\lambda(f\cos\mu-g\cos\lambda)\\ &=-g(\cos\lambda^2+\cos\nu^2)+(f\cos\lambda+h\cos\nu)\cos\mu\\ &=-g+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\mu,\\ W&=\quad(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\\ &=-\cos\lambda(h\cos\lambda-f\cos\nu)+\cos\mu(g\cos\nu-h\cos\mu)\\ &=-h(\cos\lambda^2+\cos\mu^2)+(f\cos\lambda+g\cos\mu)\cos\nu\\ &=-h+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu. \end{aligned}$$

Hiernach ist also:

22) $$\left\{\begin{aligned} U&=-f+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\lambda,\\ V&=-g+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\mu,\\ W&=-h+(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu. \end{aligned}\right.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} P&=(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\\ &=(f\cos\mu-g\cos\lambda)^2+(g\cos\nu-h\cos\mu)^2+(h\cos\lambda-f\cos\nu)^2\\ &=f^2(\cos\mu^2+\cos\nu^2)+g^2(\cos\lambda^2+\cos\nu^2)+h^2(\cos\lambda^2+\cos\mu^2)\\ &\quad-2fg\cos\lambda\cos\mu-2gh\cos\mu\cos\nu-2hf\cos\nu\cos\lambda, \end{aligned}$$

woraus sich mit Berücksichtigung der Relation

$$\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2=1$$

auf der Stelle

23) $$P=f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2$$

ergiebt.

Weil endlich

$$E^2 = (f - f_1)^2 + (g - g_1)^2 + (h - h_1)^2$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$E^2 = \cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2,$$

also

24) $$E = 1.$$

§. 5.

Führt man nun die im vorhergehenden Paragraphen gefundenen Ausdrücke in die Formeln 19) ein, so erhält man für die Coëfficienten A, B, C, D der Gleichung einer jeden Ebene, welche sich durch die gerade Linie, die durch die Gleichungen 21) charakterisirt wird, legen lässt, die folgenden Ausdrücke:

25) $$\left\{\begin{aligned} A &= -\{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\sin\omega \\ &\qquad - (g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\omega, \\ B &= -\{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\sin\omega \\ &\qquad - (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\omega. \\ C &= -\{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega \\ &\qquad - (f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega. \\ D &= \{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2\}\sin\omega. \end{aligned}\right.$$

Nach 20), 23), 24) ist

26) $$A^2 + B^2 + C^2 = f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2.$$

Auch erhält man leicht aus 25):

$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu$$

$$= -\{f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\ (\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2)\}\sin\omega$$
$$- \{(g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\lambda + (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\mu + (f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\nu\}\cos\omega,$$

also offenbar, weil

$$\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2 = 1$$

ist:

27) $$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0.$$

Weil nach 24) E = 1 ist, so ist der im vorhergehenden Paragraphen als Hülfspunkt benutzte Punkt $(f_1 g_1 h_1)$ ein Punkt in der durch die Gleichungen 21) charakterisirten geraden Linie, dessen Entfernung von dem Punkte (fgh) in dieser geraden Linie der Längeneinheit gleich ist.

Zweites Capitel.

Über die Kegelflächen, welche zwei Kugeln einhüllen.

§. 1.

Wir wollen uns zwei Kugeln denken, deren Halbmesser r und r_1, und deren Mittelpunkte respective durch die Coordinaten f, g, h und f_1, g_1, h_1 bestimmt sind, wobei wir, wie überhaupt in dieser Abhandlung, immer nur rechtwinklige Coordinaten zu Grunde legen. Zugleich wollen wir annehmen, dass r der Halbmesser der grösseren Kugel sei. Die Spitzen der die beiden Kugeln einhüllenden Kegelflächen wollen

wir im Allgemeinen durch $\mathfrak{S}$ und deren Entfernungen von dem Mittelpunkte der grösseren und von dem Mittelpunkte der kleineren Kugel, respective durch $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}_1$ bezeichnen. Die Entfernung der Mittelpunkte der beiden Kugelflächen von einander werde dagegen durch E bezeichnet.

Die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln gehenden geraden Linie sind nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$1)\qquad \frac{x-f}{f-f_1}=\frac{y-g}{g-g_1}=\frac{z-h}{h-h_1}$$

oder

$$2)\qquad \frac{x-f_1}{f-f_1}=\frac{y-g_1}{g-g_1}=\frac{z-h_1}{h-h_1}.$$

Ferner ist

$$3)\qquad E=\sqrt{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2}.$$

Mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung erhellet aber, wenn man im Folgenden immer die oberen Zeichen der äusseren, die unteren Zeichen der inneren einhüllenden Kugelfläche entsprechen lässt, auf der Stelle die Richtigkeit der folgenden Proportionen:

$$4)\qquad \begin{cases} r\mp r_1:E=r:\mathfrak{E}, \\ r\mp r_1:E=r_1:\mathfrak{E}_1; \end{cases}$$

aus denen sich

$$5)\qquad \mathfrak{E}=\frac{rE}{r\mp r_1},\quad \mathfrak{E}_1=\frac{r_1E}{r\mp r_1};$$

also nach dem Obigen

$$6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}=\dfrac{r\sqrt{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2}}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{E}_1=\dfrac{r_1\sqrt{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2}}{r\mp r_1} \end{cases}$$

ergiebt.

Sind jetzt $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten von $\mathfrak{S}$, so ist

$$\mathfrak{E}^2=(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2+(\mathfrak{z}-h)^2,$$
$$\mathfrak{E}_1^2=(\mathfrak{x}-f_1)^2+(\mathfrak{y}-g_1)^2+(\mathfrak{z}-h_1)^2;$$

und nach 1) und 2):

$$\frac{\mathfrak{x}-f}{f-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g}{g-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h}{h-h_1},$$
$$\frac{\mathfrak{x}-f_1}{f-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_1}{g-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_1}{h-h_1}.$$

Also ist offenbar

$$(f-f_1)^2\mathfrak{E}^2=\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}\,(\mathfrak{x}-f)^2,$$
$$(f-f_1)^2\mathfrak{E}_1^2=\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}\,(\mathfrak{x}-f_1)^2.$$

Nimmt man einmal den Mittelpunkt der grösseren Kugel als Anfang eines dem primitiven Coordinatensysteme parallelen Coordinatensystems an, so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in diesem neuen Coordinatensysteme f_1-f und $\mathfrak{x}-f$ die ersten Coordinaten des Mittelpunktes der kleineren Kugel und von $\mathfrak{S}$; entspricht nun $\mathfrak{S}$ der äusseren Kegelfläche, so haben offenbar f_1-f und $\mathfrak{x}-f$ gleiche Vorzeichen; und wenn $\mathfrak{S}$ der inneren Kegelfläche entspricht, so haben f_1-f und $\mathfrak{x}-f$ wieder gleiche Vorzeichen; also haben $f-f_1$ und $\mathfrak{x}-f$ immer entgegengesetzte Vorzeichen. Nimmt man dagegen den Mittelpunkt der kleineren Kugel als Anfang eines dem primitiven Coordinatensysteme parallelen Coordinatensystems an, so sind nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten in diesem neuen Coordinatensysteme $f-f_1$ und $\mathfrak{x}-f_1$ die ersten Coordinaten des Mittelpunktes der grösseren Kugel und von $\mathfrak{S}$;

entspricht nun $\mathfrak{S}$ der äusseren Kegelfläche, so haben offenbar $f-f_1$ und $\mathfrak{x}-f_1$ ungleiche Vorzeichen; entspricht dagegen $\mathfrak{S}$ der inneren Kegelfläche, so haben offenbar $f-f_1$ und $\mathfrak{x}-f_1$ gleiche Vorzeichen. Daher ist nach dem Obigen, wenn, wie früher, auch jetzt immer die oberen Zeichen der äusseren, die unteren Zeichen der inneren Kegelfläche entsprechen, offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$\mathfrak{x}-f=-\frac{(f-f_1)\mathfrak{E}}{\sqrt{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2}},$$

$$\mathfrak{x}-f_1=\mp\frac{(f-f_1)\mathfrak{E}_1}{\sqrt{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2}};$$

also nach 6):

$$\mathfrak{x}-f=-\frac{(f-f_1)r}{r\mp r_1},$$

$$\mathfrak{x}-f_1=\mp\frac{(f-f_1)r_1}{r\mp r_1};$$

und weil nun nach dem Obigen

$$\frac{\mathfrak{x}-f}{f-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g}{g-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h}{h-h_1},$$

$$\frac{\mathfrak{x}-f_1}{f-f_1}=\frac{\mathfrak{y}-g_1}{g-g_1}=\frac{\mathfrak{z}-h_1}{h-h_1}$$

ist, so ist überhaupt mit derselben Bestimmung wegen der Vorzeichen wie vorher:

$$7)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-f=-\dfrac{(f-f_1)r}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{y}-g=-\dfrac{(g-g_1)r}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{z}-h=-\dfrac{(h-h_1)r}{r\mp r_1}; \end{cases}$$

und

$$8)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-f_1=\mp\dfrac{(f-f_1)r_1}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{y}-g_1=\mp\dfrac{(g-g_1)r_1}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{z}-h_1=\mp\dfrac{(h-h_1)r_1}{r\mp r_1}. \end{cases}$$

Sowohl aus den Gleichungen 7), als auch aus den Gleichungen 8) folgt:

$$9)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}=\dfrac{rf_1\mp r_1f}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{y}=\dfrac{rg_1\mp r_1g}{r\mp r_1}, \\ \mathfrak{z}=\dfrac{rh_1\mp r_1h}{r\mp r_1}. \end{cases}$$

Nimmt man jetzt aber den Halbmesser r_1 der kleineren Kugel nicht mehr wie bisher stets positiv, sondern für die äussere Kegelfläche positiv, für die innere Kegelfläche negativ, wobei der Halbmesser r der grösseren Kugel wie früher immer positiv genommen wird, so kann man die obigen Formeln auch auf den folgenden, ganz allgemeinen Ausdruck bringen:

$$7^*)\quad \begin{cases} \mathfrak{x}-f=-\dfrac{(f-f_1)r}{r-r_1}, \\ \mathfrak{y}-g=-\dfrac{(g-g_1)r}{r-r_1}, \\ \mathfrak{z}-h=-\dfrac{(h-h_1)r}{r-r_1}; \end{cases}$$

ferner:

8*) $$\begin{cases} \mathfrak{x}-f_1=-\dfrac{(f-f_1)r_1}{r-r_1}, \\ \mathfrak{y}-g_1=-\dfrac{(g-g_1)r_1}{r-r_1}, \\ \mathfrak{z}-h_1=-\dfrac{(h-h_1)r_1}{r-r_1}; \end{cases}$$

endlich:

9*) $$\begin{cases} \mathfrak{x}=\dfrac{rf_1-r_1f}{r-r_1}, \\ \mathfrak{y}=\dfrac{rg_1-r_1g}{r-r_1}, \\ \mathfrak{z}=\dfrac{rh_1-r_1h}{r-r_1}. \end{cases}$$

§. 2.

Wir wollen jetzt, wenn

10) $$Ax+By+Cz+D=0$$

die Gleichung einer beliebigen durch die Mittelpunkte der beiden Kugeln gelegten Ebene ist, uns die folgende Aufgabe stellen:

Die Gleichungen der in dieser, d. h. durch die Gleichung 10) charakterisirten, Ebene liegenden geraden Linie zu finden, welche die beiden Kugeln entweder von aussen oder von innen berührt.

Weil die durch die Gleichung 10) charakterisirte Ebene durch die Mittelpunkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ der beiden Kugeln gehen soll, so hat man die Gleichungen:

11) $$\begin{cases} Af+Bg+Ch+D=0, \\ Af_1+Bg_1+Ch_1+D=0; \end{cases}$$

also

12) $$A(f-f_1)+B(g-g_1)+C(h-h_1)=0,$$

und nach 10) und 11):

13) $$\begin{cases} A(x-f)+B(y-g)+C(z-h)=0, \\ A(x-f_1)+B(y-g_1)+C(z-h_1)=0. \end{cases}$$

Die Coordinaten des Berührungspunktes der gesuchten Berührenden mit der grösseren Kugel seien X, Y, Z; so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten zuvörderst offenbar die Gleichungen:

$$(X-f)^2+(Y-g)^2+(Z-h)^2=r^2,$$
$$A(X-f)+B(Y-g)+C(Z-h)=0.$$

Da ferner die gesuchte Berührende durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und (XYZ) geht, so sind ihre Gleichungen:

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}}=\frac{y-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}}=\frac{z-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}}.$$

Die Gleichungen des nach dem Berührungspunkte (XYZ) gezogenen Halbmessers der grösseren Kugel sind aber:

$$\frac{x-f}{X-f}=\frac{y-g}{Y-g}=\frac{z-h}{Z-h},$$

und da nun dieser Halbmesser auf der Berührenden bekanntlich senkrecht steht, so haben wir nach den Lehren der analytischen Geometrie die Gleichung:

$$1+\frac{X-f}{Z-h}\cdot\frac{X-\mathfrak{x}}{Z-\mathfrak{z}}+\frac{Y-g}{Z-h}\cdot\frac{Y-\mathfrak{y}}{Z-\mathfrak{z}}=0$$

oder

$$(X-f)(X-\mathfrak{x})+(Y-g)(Y-\mathfrak{y})+(Z-h)(Z-\mathfrak{z})=0,$$

oder auch

$$\left.\begin{array}{c}(X-f)^2+(Y-g)^2+(Z-h)^2\\ -(\mathfrak{x}-f)(X-f)-(\mathfrak{y}-g)(Y-g)-(\mathfrak{z}-h)(Z-h)\end{array}\right\}=0,$$

also nach dem Obigen

$$(\mathfrak{x}-f)(X-f)+(\mathfrak{y}-g)(Y-g)+(\mathfrak{z}-h)(Z-h)=r^2.$$

Daher hat man jetzt zur Bestimmung von $X-f$, $Y-g$, $Z-h$ die drei folgenden Gleichungen:

$$14)\quad\left\{\begin{array}{c}A(X-f)+B(Y-g)+C(Z-h)=0,\\ (\mathfrak{x}-f)(X-f)+(\mathfrak{y}-g)(Y-g)+(\mathfrak{z}-h)(Z-h)=r^2,\\ (X-f)^2+(Y-g)^2+(Z-h)^2=r^2.\end{array}\right.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Berührungspunktes der gesuchten Berührenden mit der kleineren Kugel durch X_1, Y_1, Z_1; so erhalten wir auf ganz ähnliche Art wie vorher zur Bestimmung von X_1-f_1, Y_1-g_1, Z_1-h_1 die drei folgenden Gleichungen:

$$15)\quad\left\{\begin{array}{c}A(X_1-f_1)+B(Y_1-g_1)+C(Z_1-h_1)=0,\\ (\mathfrak{x}-f_1)(X_1-f_1)+(\mathfrak{y}-g_1)(Y_1-g_1)+(\mathfrak{z}-h_1)(Z_1-h_1)=r_1^2,\\ (X_1-f_1)^2+(Y_1-g_1)^2+(Z_1-h_1)^2=r_1^2.\end{array}\right.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen in 14) erhält man:

$$\left.\begin{array}{r}\{A(\mathfrak{z}-h)-C(\mathfrak{x}-f)\}(X-f)\\ +\{B(\mathfrak{z}-h)-C(\mathfrak{y}-g)\}(Y-g)\end{array}\right\}=-Cr^2,$$

$$\left.\begin{array}{r}\{A(\mathfrak{y}-g)-B(\mathfrak{x}-f)\}(X-f)\\ +\{C(\mathfrak{y}-g)-B(\mathfrak{z}-h)\}(Z-h)\end{array}\right\}=-Br^2.$$

Nun ist aber nach 7*):

$$A(\mathfrak{y}-g)-B(\mathfrak{x}-f)=-\frac{r}{r-r_1}\{A(g-g_1)-B(f-f_1)\},$$

$$B(\mathfrak{z}-h)-C(\mathfrak{y}-g)=-\frac{r}{r-r_1}\{B(h-h_1)-C(g-g_1)\},$$

$$C(\mathfrak{x}-f)-A(\mathfrak{z}-h)=-\frac{r}{r-r_1}\{C(f-f_1)-A(h-h_1)\};$$

also, wenn der Kürze wegen

$$16)\quad\left\{\begin{array}{l}[AB]=A(g-g_1)-B(f-f_1),\\ [BC]=B(h-h_1)-C(g-g_1),\\ [CA]=C(f-f_1)-A(h-h_1)\end{array}\right.$$

gesetzt wird:

$$17)\quad\left\{\begin{array}{l}A(\mathfrak{y}-g)-B(\mathfrak{x}-f)=-\frac{r}{r-r_1}[AB],\\ B(\mathfrak{z}-h)-C(\mathfrak{y}-g)=-\frac{r}{r-r_1}[BC],\\ C(\mathfrak{x}-f)-A(\mathfrak{z}-h)=-\frac{r}{r-r_1}[CA].\end{array}\right.$$

Daher lassen die beiden obigen Gleichungen zwischen den Grössen $X-f$, $Y-g$, $Z-h$ sich unter der folgenden Form darstellen:

$$[CA](X-f)-[BC](Y-g)=-Cr(r-r_1),$$
$$[AB](X-f)-[BC](Z-h)=\quad Br(r-r_1);$$

und zur Bestimmung der drei in Rede stehenden Grössen hat man also die drei folgenden Gleichungen:

$$18)\quad \begin{cases} Y-g=\dfrac{Cr(r-r_1)+[CA](X-f)}{[BC]}, \\ Z-h=-\dfrac{Br(r-r_1)-[AB](X-f)}{[BC]}, \\ (X-f)^2+(Y-g)^2+(Z-h)^2=r^2. \end{cases}$$

Ganz auf ähnliche Art erhält man aus den beiden ersten der Gleichungen 15) die beiden folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \{A(\mathfrak{z}-h_1)-C(\mathfrak{x}-f_1)\}(X_1-f_1) \\ +\{B(\mathfrak{z}-h_1)-C(\mathfrak{y}-g_1)\}(Y_1-g_1) \end{array}\right\}=-Cr_1^2,$$
$$\left.\begin{array}{l} \{A(\mathfrak{y}-g_1)-B(\mathfrak{x}-f_1)\}(X_1-f_1) \\ +\{C(\mathfrak{y}-g_1)-B(\mathfrak{z}-h_1)\}(Z_1-h_1) \end{array}\right\}=-Br_1^2.$$

Nach 8*) ist aber:

$$A(\mathfrak{y}-g_1)-B(\mathfrak{x}-f_1)=-\frac{r_1}{r-r_1}\{A(g-g_1)-B(f-f_1)\},$$
$$B(\mathfrak{z}-h_1)-C(\mathfrak{y}-g_1)=-\frac{r_1}{r-r_1}\{B(h-h_1)-C(g-g_1)\},$$
$$C(\mathfrak{x}-f_1)-A(\mathfrak{z}-h_1)=-\frac{r_1}{r-r_1}\{C(f-f_1)-A(h-h_1)\};$$

also nach 16):

$$19)\quad \begin{cases} A(\mathfrak{y}-g_1)-B(\mathfrak{x}-f_1)=-\dfrac{r_1}{r-r_1}[AB], \\ B(\mathfrak{z}-h_1)-C(\mathfrak{y}-g_1)=-\dfrac{r_1}{r-r_1}[BC], \\ C(\mathfrak{x}-f_1)-A(\mathfrak{z}-h_1)=-\dfrac{r_1}{r-r_1}[CA]. \end{cases}$$

Daher lassen sich die beiden obigen Gleichungen zwischen den Grössen X_1-f_1, Y_1-g_1, Z_1-h_1, unter der folgenden Form darstellen:

$$[CA](X_1-f_1)-[BC](Y_1-g_1)=-Cr_1(r-r_1),$$
$$[AB](X_1-f_1)-[BC](Z_1-h_1)=\quad Br_1(r-r_1);$$

und zur Bestimmung der drei in Rede stehenden Grössen hat man also die drei folgenden Gleichungen:

$$20)\quad \begin{cases} Y_1-g_1=\dfrac{Cr_1(r-r_1)+[CA](X_1-f_1)}{[BC]} \\ Z_1-h_1=-\dfrac{Br_1(r-r_1)-[AB](X_1-f_1)}{[BC]} \\ (X_1-f_1)^2+(Y_1-g_1)^2+(Z_1-h_1)^2=r_1^2. \end{cases}$$

§. 3.

Mittelst der drei Gleichungen 18) wollen wir nun die drei Grössen $X-f$, $Y-g$, $Z-h$ bestimmen.

Führt man die Ausdrücke von $Y-g$ und $Z-h$ in 18) in die dritte der dortigen Gleichungen ein, so erhält man:

$$r^2 = (X-f)^2 + \left\{\frac{Cr(r-r_1)+[CA](X-f)}{[BC]}\right\}^2 + \left\{\frac{Br(r-r_1)-[AB](X-f)}{[BC]}\right\}^2,$$

woraus sich leicht ergiebt:

$$(X-f)^2 - 2r(r-r_1)\frac{B[AB]-C[CA]}{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2}(X-f) = r^2\frac{[BC]^2-(r-r_1)^2(B^2+C^2)}{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2};$$

und löst man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf $X-f$ als unbekannte Grösse auf, so erhält man, mit Rücksicht auf die sogleich sich ergehende Relation:

21) $$A[BC]+B[CA]+C[AB]=0,$$

nach leichter Rechnung zuerst für $X-f$, und dann mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln

$$Y-g = \frac{Cr(r-r_1)+[CA](X-f)}{[BC]},$$
$$Z-h = -\frac{Br(r-r_1)-[AB](X-f)}{[BC]}$$

für $Y-g$ und $Z-h$, die folgenden Formeln, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

22) $$\left\{\begin{aligned} X-f &= r\frac{(r-r_1)\{B[AB]-C[CA]\} \pm [BC]\sqrt{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2-(r-r_1)^2(A^2+B^2+C^2)}}{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2}, \\ Y-g &= r\frac{(r-r_1)\{C[BC]-A[AB]\} \pm [CA]\sqrt{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2-(r-r_1)^2(A^2+B^2+C^2)}}{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2}, \\ Z-h &= r\frac{(r-r_1)\{A[CA]-B[BC]\} \pm [AB]\sqrt{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2-(r-r_1)^2(A^2+B^2+C^2)}}{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2}. \end{aligned}\right.$$

Weil aber die folgenden Relationen stattfinden:

$$B[AB]-C[CA] = -(f-f_1)(A^2+B^2+C^2),$$
$$C[BC]-A[AB] = -(g-g_1)(A^2+B^2+C^2),$$
$$A[CA]-B[BC] = -(h-h_1)(A^2+B^2+C^2)$$

und

$$[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2 = E^2(A^2+B^2+C^2);$$

so erhält man nach leichter Rechnung sogleich:

23) $$\left\{\begin{aligned} X-f &= -\frac{r}{E}\left\{\frac{(r-r_1)(f-f_1)}{E} \mp \frac{[BC]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}, \\ Y-g &= -\frac{r}{E}\left\{\frac{(r-r_1)(g-g_1)}{E} \mp \frac{[CA]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}, \\ Z-h &= -\frac{r}{E}\left\{\frac{(r-r_1)(h-h_1)}{E} \mp \frac{[AB]}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}; \end{aligned}\right.$$

und nach 7*) ist folglich:

$$24)\quad \begin{cases} X-\mathfrak{x}=\pm r\left\{\dfrac{[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pm\dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}, \\ Y-\mathfrak{y}=\pm r\left\{\dfrac{[CA]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pm\dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}, \\ Z-\mathfrak{z}=\pm r\left\{\dfrac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\pm\dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}. \end{cases}$$

§. 4.

Wir wollen nun auch die Grössen $X_1-\mathfrak{x}$, $Y_1-\mathfrak{y}$, $Z_1-\mathfrak{z}$ entwickeln, werden uns dabei aber nicht an die Formeln 20) unmittelbar anschliessen, sondern, um zugleich die Beziehung, in welcher die doppelten Vorzeichen in den Ausdrücken dieser Grössen zu den doppelten Vorzeichen in den Ausdrücken der Grössen $X-\mathfrak{x}$, $Y-\mathfrak{y}$, $Z-\mathfrak{z}$ stehen, kennen zu lernen, uns des folgenden Verfahrens bedienen.

Die Gleichungen der durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und (XYZ) gehenden geraden Linie sind bekanntlich

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}}=\frac{y-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}}=\frac{z-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}}.$$

Weil in dieser geraden Linie der Punkt $(X_1 Y_1 Z_1)$ offenbar liegt, so ist

$$\frac{X_1-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}}=\frac{Y_1-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}}=\frac{Z_1-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}}.$$

Sind nun

$$x=\mu z+\mu_1,\quad y=\nu z+\nu_1$$

die Gleichungen der von dem Punkte $(f_1 g_1 h_1)$ auf die durch die Gleichungen

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}}=\frac{y-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}}=\frac{z-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}}$$

charakterisirte gerade Linie gefällten Senkrechten, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie

$$1+\mu\,\frac{X-\mathfrak{x}}{Z-\mathfrak{z}}+\nu\,\frac{Y-\mathfrak{y}}{Z-\mathfrak{z}}=0;$$

weil aber der Punkt $(X_1 Y_1 Z_1)$ in der in Rede stehenden Senkrechten liegt, so ist

$$X_1=\mu Z_1+\mu_1,\quad Y_1=\nu Z_1+\nu_1;$$

und weil in dieser Senkrechten auch der Punkt $(f_1 g_1 h_1)$ liegt, so ist

$$f_1=\mu h_1+\mu_1,\quad g_1=\nu h_1+\nu_1;$$

also

$$X_1-f_1=\mu(Z_1-h_1),\quad Y_1-g_1=\nu(Z_1-h_1);$$

woraus

$$\mu=\frac{X_1-f_1}{Z_1-h_1},\quad \nu=\frac{Y_1-g_1}{Z_1-h_1}$$

folgt; also ist nach dem Obigen

$$1+\frac{X-\mathfrak{x}}{Z-\mathfrak{z}}\cdot\frac{X_1-f_1}{Z_1-h_1}+\frac{Y-\mathfrak{y}}{Z-\mathfrak{z}}\cdot\frac{Y_1-g_1}{Z_1-h_1}=0$$

oder

$$(X-\mathfrak{x})(X_1-f_1)+(Y-\mathfrak{y})(Y_1-g_1)+(Z-\mathfrak{z})(Z_1-h_1)=0.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$Y_1 = \mathfrak{y} + \frac{Y - \mathfrak{y}}{X - \mathfrak{x}}(X_1 - \mathfrak{x}),$$

$$Z_1 = \mathfrak{z} + \frac{Z - \mathfrak{z}}{X - \mathfrak{x}}(X_1 - \mathfrak{x});$$

also ist

$$\left.\begin{array}{l} (X - \mathfrak{x})\left\{\mathfrak{x} - f_1 + \frac{X - \mathfrak{x}}{X - \mathfrak{x}}(X_1 - \mathfrak{x})\right\} \\ + (Y - \mathfrak{y})\left\{\mathfrak{y} - g_1 + \frac{Y - \mathfrak{y}}{X - \mathfrak{x}}(X_1 - \mathfrak{x})\right\} \\ + (Z - \mathfrak{z})\left\{\mathfrak{z} - h_1 + \frac{Z - \mathfrak{z}}{X - \mathfrak{x}}(X_1 - \mathfrak{x})\right\} \end{array}\right\} = 0;$$

folglich

$$\frac{X_1 - \mathfrak{x}}{X - \mathfrak{x}} = \frac{Y_1 - \mathfrak{y}}{Y - \mathfrak{y}} = \frac{Z_1 - \mathfrak{z}}{Z - \mathfrak{z}}$$

$$= \frac{(f_1 - \mathfrak{x})(X - \mathfrak{x}) + (g_1 - \mathfrak{y})(Y - \mathfrak{y}) + (h_1 - \mathfrak{z})(Z - \mathfrak{z})}{(X - \mathfrak{x})^2 + (Y - \mathfrak{y})^2 + (Z - \mathfrak{z})^2}.$$

Weil nun aber nach 8*)

$$f_1 - \mathfrak{x} = \frac{(f - f_1)r_1}{r - r_1}, \quad g_1 - \mathfrak{y} = \frac{(g - g_1)r_1}{r - r_1}, \quad h_1 - \mathfrak{z} = \frac{(h - h_1)r_1}{r - r_1}$$

und, wie man leicht findet,

$$(f - f_1)[BC] + (g - g_1)[CA] + (h - h_1)[AB] = 0$$

ist, so ist nach 24)

$$(f_1 - \mathfrak{x})(X - \mathfrak{x}) + (g_1 - \mathfrak{y})(Y - \mathfrak{y}) + (h_1 - z)(Z - z)$$
$$= \frac{r r_1 E^2}{(r - r_1)^2}\left\{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2\right\}.$$

Ferner ist nach 24)

$$(X - \mathfrak{x})^2 + (Y - \mathfrak{y})^2 + (Z - z)^2$$
$$= r^2\left\{\frac{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}{E^2(A^2 + B^2 + C^2)} + \frac{E^2}{(r - r_1)^2}\left[1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)\right]\right\}\left\{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2\right\},$$

also, weil bekanntlich

$$[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2 = E^2(A^2 + B^2 + C^2)$$

ist:

$$(X - \mathfrak{x})^2 + (Y - \mathfrak{y})^2 + (Z - \mathfrak{z})^2 = \frac{r^2 E^2}{(r - r_1)^2}\left\{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2\right\}.$$

Folglich ist

$$\frac{(f_1 - \mathfrak{x})(X - \mathfrak{x}) + (g_1 - \mathfrak{y})(Y - \mathfrak{y}) + (h_1 - \mathfrak{z})(Z - \mathfrak{z})}{(X - \mathfrak{x})^2 + (Y - \mathfrak{y})^2 + (Z - \mathfrak{z})^2} = \frac{r_1}{r}$$

und daher nach dem Obigen:

$$\frac{X_1 - \mathfrak{x}}{X - \mathfrak{x}} = \frac{Y_1 - \mathfrak{y}}{Y - \mathfrak{y}} = \frac{Z_1 - \mathfrak{z}}{Z - \mathfrak{z}} = \frac{r_1}{r}$$

oder

$$X_1 - \mathfrak{x} = \frac{r_1}{r}(X - \mathfrak{x}), \quad Y_1 - \mathfrak{y} = \frac{r_1}{r}(Y - \mathfrak{y}), \quad Z_1 - \mathfrak{z} = \frac{r_1}{r}(Z - \mathfrak{z}).$$

Folglich ist nach 24) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$25)\quad \begin{cases} X_1 - \mathfrak{x} = \pm r_1 \left\{ \dfrac{[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \pm \dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2} \right\} \sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}, \\ Y_1 - \mathfrak{y} = \pm r_1 \left\{ \dfrac{[CA]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \pm \dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2} \right\} \sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}, \\ Z_1 - \mathfrak{z} = \pm r_1 \left\{ \dfrac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \pm \dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2} \right\} \sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}. \end{cases}$$

§. 5.

Bekanntlich beziehen in den Gleichungen 24) und 25) die oberen und unteren Zeichen sich auf einander, und was den Winkel ω betrifft, so ist aus dem Obigen bekannt, dass wir denselben blos von 0 bis 180° wachsen zu lassen brauchen. Indess ist es für die weitere Entwickelung vortheilhaft, aus den in Rede stehenden Formeln die doppelten Zeichen wegzuschaffen, wodurch eine andere Bestimmung wegen des Winkels ω bedingt wird. Weil nämlich, wie man leicht findet:

$$\frac{[AB]}{E} = (fg_1 - gf_1)E\sin\omega - \{(f-f_1)(hf_1 - fh_1) - (g-g_1)(gh_1 - hg_1)\}\cos\omega,$$

$$\frac{[BC]}{E} = (gh_1 - hg_1)E\sin\omega - \{(g-g_1)(fg_1 - gf_1) - (h-h_1)(hf_1 - fh_1)\}\cos\omega,$$

$$\frac{[CA]}{E} = (hf_1 - fh_1)E\sin\omega - \{(h-h_1)(gh_1 - hg_1) - (f-f_1)(fg_1 - gf_1)\}\cos\omega$$

und

$$\sin(180^0 + \omega) = -\sin\omega, \quad \cos(180^0 + \omega) = -\cos\omega$$

ist, so sieht man, dass für zwischen 180° und 360° liegende Werthe von ω die Grössen $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ dieselben absoluten Werthe wie für die zwischen 0 und 180° liegenden Werthe von ω erhalten, aber ihre Vorzeichen ändern. Beachtet man nun die Gestalt der Ausdrücke 24) und 25) von

$$X - \mathfrak{x}, \quad Y - \mathfrak{y}, \quad Z - \mathfrak{z} \quad \text{und} \quad X_1 - \mathfrak{x}, \quad Y_1 - \mathfrak{y}, \quad Z_1 - \mathfrak{z};$$

so wie, dass

$$A^2 + B^2 + C^2 = \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\}E^2,$$

also diese Grösse von ω ganz unabhängig ist, so wird auf der Stelle erhellen, dass, wenn man ω nicht, wie bisher, blos von 0 bis 180°, sondern von 0 bis 360° wachsen lässt, es nicht mehr nöthig ist, in den Ausdrücken 24) und 25) die doppelten Zeichen beizubehalten, sondern dass man sich mit einem Zeichen begnügen kann. Ob man aber in den genannten Ausdrücken, unter der gemachten Voraussetzung wegen des Winkels ω, die oberen oder die unteren Zeichen nehmen will, ist, wie ebenfalls sogleich in die Augen fällt, an sich ganz gleichgültig, und es wird uns daher verstattet sein, für das Folgende von jetzt an die Bestimmung zu geben, dass in den Ausdrücken 24) und 25) blos die oberen Zeichen genommen werden sollen, natürlich aber mit der gleichzeitigen Bestimmung, dass wir nun den Winkel ω nicht mehr wie bisher blos von 0 bis 180°, sondern von 0 bis 360° wachsen lassen. Unter dieser Voraussetzung wollen wir daher in der Folge immer setzen:

$$24^*)\quad \begin{cases} X-\mathfrak{x}=r\left\{\dfrac{[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2},\\ Y-\mathfrak{y}=r\left\{\dfrac{[CA]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2},\\ Z-\mathfrak{z}=r\left\{\dfrac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2} \end{cases}$$

und

$$25^*)\quad \begin{cases} X_1-\mathfrak{x}=r_1\left\{\dfrac{[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2},\\ Y_1-\mathfrak{y}=r_1\left\{\dfrac{[CA]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2},\\ Z_1-\mathfrak{z}=r_1\left\{\dfrac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}. \end{cases}$$

§. 6.

Die Gleichungen der gesuchten Berührenden sind

$$26)\quad \frac{x-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}}=\frac{y-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}}=\frac{z-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}},$$

oder

$$27)\quad \frac{x-\mathfrak{x}}{X_1-\mathfrak{x}}=\frac{y-\mathfrak{y}}{Y_1-\mathfrak{y}}=\frac{z-\mathfrak{z}}{Z_1-\mathfrak{z}};$$

oder auch

$$28)\quad \frac{x-X}{X-X_1}=\frac{y-Y}{Y-Y_1}=\frac{z-Z}{Z-Z_1},$$

oder

$$29)\quad \frac{x-X_1}{X-X_1}=\frac{y-Y_1}{Y-Y_1}=\frac{z-Z_1}{Z-Z_1}.$$

Weil $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; $X-\mathfrak{x}$, $Y-\mathfrak{y}$, $Z-\mathfrak{z}$; $X_1-\mathfrak{x}$, $Y_1-\mathfrak{y}$, $Z_1-\mathfrak{z}$ aus dem Obigen bekannt sind, so können die Gleichungen der gesuchten Berührenden jetzt als vollständig entwickelt betrachtet werden.

Wenn die beiden Kugeln ganz ausserhalb einander liegen, so ist immer, d. h. r_1 mag positiv oder negativ sein:

$$\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 \leqq 1,$$

also immer

$$1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 \geqq 0.$$

Wenn die beiden Kugeln sich schneiden, so ist, je nachdem r_1 positiv oder negativ ist, respective

$$\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 < 1 \text{ oder } \left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 > 1,$$

also

$$1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 > 0 \text{ oder } 1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 < 0.$$

Wenn die kleinere Kugel ganz innerhalb der grösseren liegt, so ist immer, d. h. r_1 mag positiv oder negativ sein:

$$\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 \geqq 1,$$

also immer

$$1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 \overline{\gtrless} 0.$$

Die geometrische Deutung dieser analytischen Resultate unterliegt keinem Zweifel, und braucht hier nicht weiter erläutert zu werden.

Wegen der doppelten Zeichen in den in §. 3 und §. 4 entwickelten Ausdrücken, insofern diese Ausdrücke reelle Resultate liefern, oder die Aufgabe überhaupt möglich ist, giebt es im Allgemeinen immer zwei äussere und zwei innere derselben genügende Berührende, was auch aus der einfachsten geometrischen Betrachtung auf der Stelle erhellet.

Drittes Capitel.

Über die Aufgabe: Wenn eine Kugel und eine durch deren Mittelpunkt gehende gerade Linie, letztere der Lage nach, gegeben sind: die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche der gegebenen geraden Linie parallel ist, in einer gegebenen durch diese gerade Linie gelegten Ebene liegt, und die gegebene Kugel berührt.

Genauer präcisirt lautet die Aufgabe, mit deren Auflösung wir uns in diesem Capitel beschäftigen werden, folgendermassen:

Die Gleichungen einer geraden Linie zu finden, welche in der durch die Gleichung

$$1)\qquad Ax+By+Cz+D=0$$

charakterisirten Ebene, die durch eine gegebene gerade Linie, deren Gleichungen

$$2)\qquad \frac{x-f}{\cos\lambda}=\frac{y-g}{\cos\mu}=\frac{z-h}{\cos\nu}$$

sind, gelegt ist, liegt; der durch die vorstehenden Gleichungen charakterisirten geraden Linie parallel ist; und eine aus dem Mittelpunkte (fgh) mit dem Halbmesser r beschriebene Kugel berührt.

Die Gleichungen der gesuchten geraden Linie haben, wenn wir die Coordinaten ihres Berührungspunktes mit der aus dem Mittelpunkte (fgh) mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel durch X, Y, Z bezeichnen, offenbar im Allgemeinen die Form

$$3)\qquad \frac{x-X}{\cos\lambda}=\frac{y-Y}{\cos\mu}=\frac{z-Z}{\cos\nu}.$$

Die Gleichungen der durch die Punkte (fgh) und (XYZ) gehenden geraden Linie sind

$$4)\qquad \frac{x-f}{X-f}=\frac{y-g}{Y-g}=\frac{z-h}{Z-h}.$$

oder

$$5)\qquad \frac{x-X}{X-f}=\frac{y-Y}{Y-g}=\frac{z-Z}{Z-h}.$$

Da nach den Bedingungen der Aufgabe diese Linie auf der durch die Gleichungen

$$\frac{x-X}{\cos\lambda}=\frac{y-Y}{\cos\mu}=\frac{z-Z}{\cos\nu}$$

charakterisirten Linie senkrecht stehen muss, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$1 + \frac{\cos\lambda}{\cos\mu} \cdot \frac{X-f}{Z-h} + \frac{\cos\mu}{\cos\nu} \cdot \frac{Y-g}{Z-h} = 0$$

oder

6) $$(X-f)\cos\lambda + (Y-g)\cos\mu + (Z-h)\cos\nu = 0.$$

Da ferner nach den Bedingungen der Aufgabe die durch die Gleichungen

$$\frac{x-X}{\cos\lambda} = \frac{y-Y}{\cos\mu} = \frac{z-Z}{\cos\nu}$$

charakterisirte Linie in der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen soll, so ist für jedes x:

$$Ax + B\left\{Y + \frac{\cos\mu}{\cos\lambda}(x-X)\right\} + C\left\{Z + \frac{\cos\nu}{\cos\lambda}(x-X)\right\} + D = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l}(A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu)\,x \\ + B(Y\cos\lambda - X\cos\mu) + C(Z\cos\lambda - X\cos\nu) + D\cos\lambda\end{array}\right\} = 0,$$

also

7) $$\left\{\begin{array}{l}A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0, \\ B(Y\cos\lambda - X\cos\mu) + C(Z\cos\lambda - X\cos\nu) + D\cos\lambda = 0.\end{array}\right.$$

Die zweite dieser beiden Gleichungen giebt

$$-(B\cos\mu - C\cos\nu)X + B\cos\lambda \,.\, Y + C\cos\lambda \,.\, Z + D\cos\lambda = 0,$$

also vermöge der ersten der Gleichungen 7):

$$A\cos\lambda \,.\, X + B\cos\lambda \,.\, Y + C\cos\lambda \,.\, Z + D\cos\lambda = 0,$$

folglich

8) $$AX + BY + CZ + D = 0,$$

wie sich auch von selbst versteht, da der Punkt (XYZ) in der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene liegen muss.

Der Punkt (fgh) liegt auch in dieser Ebene, und es ist folglich

9) $$Af + Bg + Ch + D = 0,$$

also nach 8) und 9):

10) $$A(X-f) + B(Y-g) + C(Z-h) = 0.$$

Da nun endlich der Punkt (XYZ) auch in der Oberfläche der aus dem Mittelpunkte (fgh) mit dem Halbmesser r beschriebenen Kugel liegt, so ist

11) $$(X-f)^2 + (Y-g)^2 + (Z-h)^2 = r^2;$$

und zur Bestimmung von X, Y, Z haben wir daher jetzt nach 6), 10), 11) die drei folgenden Gleichungen:

12) $$\left\{\begin{array}{l}\cos\lambda\,(X-f) + \cos\mu\,(Y-g) + \cos\nu\,(Z-h) = 0, \\ A(X-f) + B(Y-g) + C(Z-h) = 0, \\ (X-f)^2 + (Y-g)^2 + (Z-h)^2 = r^2.\end{array}\right.$$

Aus den beiden ersten dieser drei Gleichungen folgt:

$$(C\cos\lambda - A\cos\nu)(X-f) - (B\cos\nu - C\cos\mu)(Y-g) = 0,$$
$$(A\cos\mu - B\cos\lambda)(X-f) - (B\cos\nu - C\cos\mu)(Z-h) = 0;$$

d. i., wenn wir

13) $$\begin{cases} \{AB\} = A\cos\mu - B\cos\lambda, \\ \{BC\} = B\cos\nu - C\cos\mu, \\ \{CA\} = C\cos\lambda - A\cos\nu \end{cases}$$

setzen:

$$\{CA\}(X-f) - \{BC\}(Y-g) = 0,$$
$$\{AB\}(X-f) - \{BC\}(Z-h) = 0;$$

woraus

14) $$Y-g = \frac{\{CA\}}{\{BC\}}(X-f), \quad Z-h = \frac{\{AB\}}{\{BC\}}(X-f)$$

folgt. Also ist nach der dritten der Gleichungen 12):

$$\frac{\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2}{\{BC\}^2}(X-f)^2 = r^2,$$

und folglich hiernach und nach 14), mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

15) $$\begin{cases} X-f = \pm \dfrac{r\{BC\}}{\sqrt{\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2}}, \\ Y-g = \pm \dfrac{r\{CA\}}{\sqrt{\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2}}, \\ Z-h = \pm \dfrac{r\{AB\}}{\sqrt{\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2}}. \end{cases}$$

Nach 7) und 13) ist aber, wie man leicht findet,

$$\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

also

16) $$\begin{cases} X-f = \pm \dfrac{r\{BC\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Y-g = \pm \dfrac{r\{CA\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Z-h = \pm \dfrac{r\{AB\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{cases}$$

oder

17) $$\begin{cases} X = f \pm \dfrac{r\{BC\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Y = g \pm \dfrac{r\{CA\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Z = h \pm \dfrac{r\{AB\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \end{cases}$$

Es giebt also im Allgemeinen zwei Auflösungen unserer Aufgabe.

Bedenkt man aber, dass, wie man leicht findet:

$$\{AB\} = -(f\cos\mu - g\cos\lambda)\sin\omega$$
$$+ \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\cos\omega,$$
$$\{BC\} = -(g\cos\nu - h\cos\mu)\sin\omega$$
$$+ \{(f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\}\cos\omega,$$
$$\{CA\} = -(h\cos\lambda - f\cos\nu)\sin\omega$$
$$+ \{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\cos\omega$$

ist; so erhellet auf ganz ähnliche Art wie in Cap. II, §. 5, dass es, wenn man ω von 0 bis 360° wachsen lässt, genügt, in den obigen Formeln die oberen Zeichen zu nehmen, und daher

18)
$$\left\{\begin{aligned} X &= f + \frac{r\{BC\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Y &= g + \frac{r\{CA\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Z &= h + \frac{r\{AB\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \end{aligned}\right.$$

zu setzen.

Viertes Capitel.

Über die Durchschnittspunkte einer geraden Linie mit der Oberfläche eines Ellipsoides im Allgemeinen.

Die Gleichung der Oberfläche eines Ellipsoides sei

1)
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1,$$

und

2)
$$\frac{x-a_1}{\cos\alpha} = \frac{y-b_1}{\cos\beta} = \frac{z-c_1}{\cos\gamma}$$

seien die Gleichungen einer geraden Linie im Raume. Handelt es sich nun um die Durchschnittspunkte dieser geraden Linie mit der Oberfläche des Ellipsoides, so kommt es darauf an, aus den drei obigen Gleichungen die Coordinaten x, y, z dieser Durchschnittspunkte zu bestimmen, wozu man auf folgende Art gelangt.

Weil nach den Gleichungen 2)

$$y = b_1 + \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}(x - a_1), \qquad z = c_1 + \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha}(x - a_1)$$

ist, so ist vermöge der Gleichung 1):

$$\left\{\frac{a_1}{a} + \frac{\cos\alpha}{a}\cdot\frac{x-a_1}{\cos\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{b_1}{b} + \frac{\cos\beta}{b}\cdot\frac{x-a_1}{\cos\alpha}\right\}^2 + \left\{\frac{c_1}{c} + \frac{\cos\gamma}{c}\cdot\frac{x-a_1}{\cos\alpha}\right\}^2 = 1,$$

also nach gehöriger Entwickelung:

$$1 = \left(\frac{a_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{b_1}{b}\right)^2 + \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 + 2\left\{\frac{a_1\cos\alpha}{a^2} + \frac{b_1\cos\beta}{b^2} + \frac{c_1\cos\gamma}{c^2}\right\}\frac{x-a_1}{\cos\alpha}$$
$$+ \left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2 + \left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2 + \left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\left(\frac{x-a_1}{\cos\alpha}\right)^2$$

oder, wenn man diese Gleichung auf die gewöhnliche Form der quadratischen Gleichungen bringt:

$$\left(\frac{x-a_1}{\cos\alpha}\right)^2+2\,\frac{\dfrac{a_1\cos\alpha}{a^2}+\dfrac{b_1\cos\beta}{b^2}+\dfrac{c_1\cos\gamma}{c^2}}{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{c}\right)^2}\cdot\frac{x-a_1}{\cos\alpha}$$

$$=\frac{1-\left(\dfrac{a_1}{a}\right)^2-\left(\dfrac{b_1}{b}\right)^2-\left(\dfrac{c_1}{c}\right)^2}{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{c}\right)^2}.$$

Also ist

$$\left\{\frac{x-a_1}{\cos\alpha}+\frac{\dfrac{a_1\cos\alpha}{a^2}+\dfrac{b_1\cos\beta}{b^2}+\dfrac{c_1\cos\gamma}{c^2}}{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{c}\right)^2}\right\}^2$$

$$=\frac{\left(\dfrac{a_1\cos\alpha}{a^2}+\dfrac{b_1\cos\beta}{b^2}+\dfrac{c_1\cos\gamma}{c^2}\right)^2+\left\{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\left\{1-\left(\dfrac{a_1}{a}\right)^2-\left(\dfrac{b_1}{b}\right)^2-\left(\dfrac{c_1}{c}\right)^2\right\}}{\left\{\left(\dfrac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\dfrac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}^2}.$$

Wenn man den Zähler des Bruches auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens gehörig entwickelt, und aufhebt, was sich aufheben lässt, so erhält man für denselben leicht den folgenden Ausdruck:

$$\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2$$

$$-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2,$$

und daher nach dem Vorhergehenden, mit Rücksicht auf die Gleichungen 2):

3)
$$\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\frac{x-a_1}{\cos\alpha}$$

$$=\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\frac{y-b_1}{\cos\beta}$$

$$=\left\{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\right\}\frac{z-c_1}{\cos\gamma}$$

$$=-\frac{a_1\cos\alpha}{a^2}-\frac{b_1\cos\beta}{b^2}-\frac{c_1\cos\gamma}{c^2}$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2}.$$

Für die Kugel ist $a=b=c$, also

4)
$$\frac{x-a_1}{\cos\alpha}=\frac{y-b_1}{\cos\beta}=\frac{z-c_1}{\cos\gamma}$$

$$=-(a_1\cos\alpha+b_1\cos\beta+c_1\cos\gamma)$$

$$\pm a\sqrt{1-\frac{(a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha)^2+(b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta)^2+(c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma)^2}{a^2}}.$$

Die durch die Gleichungen 2) charakterisirte gerade Linie schneidet die durch die Gleichung 1) charakterisirte Oberfläche des Ellipsoides in zwei Punkten, wenn

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\\-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2\end{array}\right\}>0$$

ist.

Die durch die Gleichungen 2) charakterisirte gerade Linie trifft die durch die Gleichung 1) charakterisirte Oberfläche des Ellipsoides nur in einem Punkte, und berührt dieselbe also, wenn

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\\-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2\end{array}\right\}=0$$

ist.

Die durch die Gleichungen 2) charakterisirte gerade Linie trifft die durch die Gleichung 1) charakterisirte Oberfläche des Ellipsoides gar nicht, wenn

$$\left.\begin{array}{c}\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\\-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2\end{array}\right\}<0$$

ist.

Die durch die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

charakterisirte Kugelfläche wird von der durch die Gleichungen 2) charakterisirten geraden Linie in zwei Punkten geschnitten, wenn

$$(a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha)^2+(b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta)^2+(c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma)^2<a^2$$

ist.

Die durch die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

charakterisirte Kugelfläche wird von der durch die Gleichungen 2) charakterisirten geraden Linie nur in einem Punkte getroffen, und also von dieser geraden Linie berührt, wenn

$$(a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha)^2+(b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta)^2+(c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma)^2=a^2$$

ist.

Die durch die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

charakterisirte Kugelfläche wird von der durch die Gleichungen 2) charakterisirten geraden Linie gar nicht getroffen, wenn

$$(a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha)^2+(b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta)^2+(c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma)^2>a^2$$

ist.

Mittelst leichter Rechnung findet man, dass auch

5)
$$\begin{aligned}&\left(\frac{\cos\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\cos\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\cos\gamma}{c}\right)^2\\&-\left(\frac{a_1\cos\beta-b_1\cos\alpha}{ab}\right)^2-\left(\frac{b_1\cos\gamma-c_1\cos\beta}{bc}\right)^2-\left(\frac{c_1\cos\alpha-a_1\cos\gamma}{ca}\right)^2\\&=\frac{1}{a^2}\left(1-\frac{b_1^2}{b^2}-\frac{c_1^2}{c^2}\right)\cos\alpha^2+\frac{1}{b^2}\left(1-\frac{c_1^2}{c^2}-\frac{a_1^2}{a^2}\right)\cos\beta^2+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{a_1^2}{a^2}-\frac{b_1^2}{b^2}\right)\cos\gamma^2\\&+2\frac{a_1b_1}{a^2b^2}\cos\alpha\cos\beta+2\frac{b_1c_1}{b^2c^2}\cos\beta\cos\gamma+2\frac{c_1a_1}{c^2a^2}\cos\gamma\cos\alpha\end{aligned}$$

ist.

Fünftes Capitel.

Theorie der Bedeckungen, wenn keiner der beiden Weltkörper ein Fixstern ist.

(Theorie der Sonnenfinsternisse.)

§. 1.

Alles kommt hier auf die Betrachtung der durch die in Cap. II durch $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1 Y_1 Z_1)$ bezeichneten Punkte gehenden geraden Linie an, womit wir uns also jetzt in aller Ausführlichkeit beschäftigen wollen.

Die Gleichungen der in Rede stehenden geraden Linie sind bekanntlich

$$1)\qquad \frac{x-\mathfrak{x}}{X-\mathfrak{x}} = \frac{y-\mathfrak{y}}{Y-\mathfrak{y}} = \frac{z-\mathfrak{z}}{Z-\mathfrak{z}}.$$

Bezeichnen wir aber die von der einen der beiden Richtungen dieser geraden Linie, welche man bei jeder geraden Linie unterscheiden kann, mit den positiven Richtungen der drei Coordinaten-Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch φ, ψ, χ; so sind die Gleichungen dieser geraden Linie auch:

$$2)\qquad \frac{x-y}{\cos\varphi} = \frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\psi} = \frac{z-\mathfrak{z}}{\cos\chi},$$

und aus der Vergleichung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 1) ergiebt sich daher, wenn μ einen gewissen constanten Factor bezeichnet, unmittelbar:

$$\cos\varphi = \mu(X-\mathfrak{x}),$$
$$\cos\psi = \mu(Y-\mathfrak{y}),$$
$$\cos\chi = \mu(Z-\mathfrak{z}).$$

Zur Bestimmung des constanten Factors μ hat man aber die Gleichung

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1,$$

also nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$\mu^2\{(X-\mathfrak{x})^2 + (Y-\mathfrak{y})^2 + (Z-\mathfrak{z})^2\} = 1.$$

Weil nun

$$[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2 = E(A^2 + B^2 + C^2)$$

und

$$(f-f_1)[BC] + (g-g_1)[CA] + (h-h_1)[AB] = 0,$$

auch

$$(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2 = E^2$$

ist, so erhält man aus Cap. II, §. 5, Nr. 24*) leicht

$$(X-\mathfrak{x})^2 + (Y-\mathfrak{y})^2 + (Z-\mathfrak{z})^2 = \frac{r^2E^2}{(r-r_1)^2}\left\{1 - \left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2\right\},$$

und folglich nach dem Obigen

$$\frac{r^2E^2}{(r-r_1)^2}\left\{1 - \left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2\right\}\mu^2 = 1,$$

woraus sich

$$\mu = \pm \frac{r - r_1}{r E \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}}$$

ergiebt. Weil es aber völlig gleichgültig ist, auf welche der beiden Richtungen der durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1 Y_1 Z_1)$ gehenden geraden Linie man die Winkel φ, ψ, χ beziehen will, indem es nur auf die Bestimmung der Lage dieser geraden Linie an sich im Raume ankommt, so reicht es offenbar hin, in dem obigen Ausdrucke des constanten Factors μ blos das obere Zeichen beizubehalten, also

$$3) \qquad \mu = \frac{r - r_1}{r E \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}},$$

folglich nach dem Obigen

$$4) \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{(r - r_1)(X - \mathfrak{x})}{r E \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}}, \\[2ex] \cos\psi = \dfrac{(r - r_1)(Y - \mathfrak{y})}{r E \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}}, \\[2ex] \cos\chi = \dfrac{(r - r_1)(Z - \mathfrak{z})}{r E \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}} \end{cases}$$

zu setzen.

Führt man nun in diese Formeln die bekannten Ausdrücke von $X - \mathfrak{x}$, $Y - \mathfrak{y}$, $Z - \mathfrak{z}$ aus Cap. II. §. 5, Nr. 24*) ein, so erhält man:

$$5) \qquad \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{r - r_1}{E} \left\{ \dfrac{[BC]}{E\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \dfrac{f - f_1}{r - r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} \right\}, \\[2ex] \cos\psi = \dfrac{r - r_1}{E} \left\{ \dfrac{[CA]}{E\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \dfrac{g - g_1}{r - r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} \right\}, \\[2ex] \cos\chi = \dfrac{r - r_1}{E} \left\{ \dfrac{[AB]}{E\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} + \dfrac{h - h_1}{r - r_1} \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} \right\}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln kann man verschiedene bemerkenswerthe Relationen ableiten, von denen wir jedoch hier nur die folgenden, sich sogleich ganz von selbst ergebenden hervorheben wollen:

$$6) \qquad (f - f_1)\cos\varphi + (g - g_1)\cos\psi + (h - h_1)\cos\chi = E\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2};$$

ferner:

$$7) \qquad A\cos\varphi + B\cos\psi + C\cos\chi = 0;$$

auch:

$$8) \qquad [BC]\cos\varphi + [CA]\cos\psi + [AB]\cos\chi = (r - r_1)\sqrt{A^2 + B^2 + C^2};$$

endlich:

$$9) \qquad \begin{cases} (\mathfrak{x} - f)\cos\varphi + (\mathfrak{y} - g)\cos\psi + (\mathfrak{z} - h)\cos\chi = -\dfrac{rE}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}, \\[2ex] (\mathfrak{x} - f_1)\cos\varphi + (\mathfrak{y} - g_1)\cos\psi + (\mathfrak{z} - h_1)\cos\chi = -\dfrac{r_1 E}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}; \end{cases}$$

woraus

$$10)\qquad \frac{(\mathfrak{x}-f)\cos\varphi+(\mathfrak{y}-g)\cos\psi+(\mathfrak{z}-h)\cos\chi}{(\mathfrak{x}-f_1)\cos\varphi+(\mathfrak{y}-g_1)\cos\psi+(\mathfrak{z}-h_1)\cos\chi}=\frac{r}{r_1}$$

folgt. Die Ableitung noch anderer Relationen aus den obigen Ausdrücken von $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$, die für unseren Zweck von geringer Wichtigkeit sind, können wir füglich dem Leser überlassen.

Führen wir aber die obigen Ausdrücke 5) von $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ für $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ und $A^2+B^2+C^2$ ihre Ausdrücke durch ω ein, so erhalten wir:

$$11)\qquad \cos\varphi=\frac{r-r_1}{E}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(gh_1-hg_1)E\sin\omega-\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\cos\omega}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\\ \qquad\qquad +\dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\end{array}\right\},$$

$$\cos\psi=\frac{r-r_1}{E}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(hf_1-fh_1)E\sin\omega-\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\cos\omega}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\\ \qquad\qquad +\dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\end{array}\right\},$$

$$\cos\chi=\frac{r-r_1}{E}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{(fg_1-gf_1)E\sin\omega-\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}\cos\omega}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\\ \qquad\qquad +\dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\end{array}\right\}.$$

§. 2.

Indem wir von jetzt an alles Folgende auf ein bestimmtes absolutes Zeitmoment beziehen, welchem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ des Orts, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, entspricht, kommt es nun zunächst darauf an, alle diejenigen Orte auf der Erdoberfläche zu ermitteln, die in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente eine innere Berührung der beiden Weltkörper sehen, wobei wir die Erde als ein durch die Gleichung

$$12)\qquad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$$

charakterisirtes Umdrehungs-Ellipsoid, entstanden durch Umdrehung einer Ellipse, um die Axe $2b$, betrachten, und nach Cap. II, §. 1, bekanntlich der Halbmesser r_1 der kleineren Kugel für äussere Berührungen negativ, für innere Berührungen positiv genommen werden muss.

Die gesuchten Punkte erhält man aber sämmtlich, wenn man für das in Rede stehende absolute Zeitmoment die Coordinaten x, y, z der Durchschnittspunkte der durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1Y_1Z_1)$ gehenden geraden Linie mit der Erdoberfläche sucht, und in den dadurch erhaltenen Formeln dann den Winkel ω, von welchem dieselben abhängen, von 0 bis 360° wachsen lässt.

Eine ganz feste Bestimmung wegen des Coordinatensystems ist bis jetzt absichtlich noch nicht gegeben worden; am besten wird man aber thun, wenn man dasselbe hier ganz eben so annimmt, wie in den Denkschriften Band VII, Cap. I, §. 1 [1]). Dann hat man, wenn die Coordinaten x, y, z eines Orts auf der Erdoberfläche gegeben oder mittelst des Obigen gefunden sind, zur Bestimmung seiner Länge L in

---

[1]) Hierunter wird immer die in den Denkschriften Bd. VII abgedruckte Abhandlung: „Theorie der Sonnenfinsternisse, der Durchgänge der unteren Planeten vor der Sonne und der Sternbedeckungen für einen gegebenen Ort der Erde“ verstanden.

Bezug auf den Ort, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, als Anfang der Längen, seiner geographischen oder geocentrischen Breite, die wir jetzt durch Φ bezeichnen wollen, und des nach diesem Orte gezogenen Erdhalbmessers, der jetzt durch R bezeichnet werden mag, nach Denkschriften, Band VII, Cap. I, §. 2, Nr. 3) die folgenden Formeln:

$$13)\quad \begin{cases} x = R\cos\Phi\cos(L + 15\mathfrak{T}), \\ y = R\cos\Phi\sin(L + 15\mathfrak{T}), \\ z = R\sin\Phi; \end{cases}$$

aus denen sich

$$14)\quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \sin\Phi = \frac{z}{R}; \\ \cos(L + 15\mathfrak{T}) = \frac{x}{R\cos\Phi}, \quad \sin(L + 15\mathfrak{T}) = \frac{y}{R\cos\Phi}, \quad \tan g\,(L + 15\mathfrak{T}) = \frac{y}{x} \end{cases}$$

ergiebt. Wenn man nur weiss, ob

$$0 < L + 15\mathfrak{T} < 360° \text{ oder } 360° < L + 15\mathfrak{T} < 2.360°$$

ist, so lassen diese Formeln gar keine Zweideutigkeit zu. Uebrigens hat man aber wegen der beiden ersten Gleichungen in 13):

$$\frac{x}{R\cos\Phi} = \cos 15\mathfrak{T}\cos L - \sin 15\mathfrak{T}\sin L,$$

$$\frac{y}{R\cos\Phi} = \sin 15\mathfrak{T}\cos L + \cos 15\mathfrak{T}\sin L;$$

aus denen sich

$$\cos L = \frac{x\cos 15\mathfrak{T} + y\sin 15\mathfrak{T}}{R\cos\Phi},$$

$$\sin L = -\frac{x\sin 15\mathfrak{T} - y\cos 15\mathfrak{T}}{R\cos\Phi},$$

$$\tan g\, L = -\frac{x\sin 15\mathfrak{T} - y\cos 15\mathfrak{T}}{x\cos 15\mathfrak{T} + y\sin 15\mathfrak{T}}$$

ergiebt, so dass man jetzt die folgenden Formeln hat:

$$15)\quad \begin{cases} R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \sin\Phi = \frac{z}{R}; \\ \cos L = \frac{x\cos 15\mathfrak{T} + y\sin 15\mathfrak{T}}{R\cos\Phi}, \\ \sin L = -\frac{x\sin 15\mathfrak{T} - y\cos 15\mathfrak{T}}{R\cos\Phi}, \\ \tan g\, L = -\frac{x\sin 15\mathfrak{T} - y\cos 15\mathfrak{T}}{x\cos 15\mathfrak{T} + y\sin 15\mathfrak{T}}, \end{cases}$$

welche gar keine Zweideutigkeit zulassen, weil L immer positiv und nie grösser als 360°, Φ zwar positiv und negativ, absolut genommen aber nie grösser als 90° ist.

Am besten verfährt man aber, wie es mir scheint, auf folgende Art. Man setze

$$L + 15\mathfrak{T} = \theta,$$

so ist

$$x = R \cos\Phi \cos\Theta,$$
$$y = R \cos\Phi \sin\Theta,$$
$$z = R \sin\Phi.$$

Nun bestimme man nach einer hinreichend bekannten Methode mittelst dieser Formeln, indem man Θ vorläufig als einen blossen Hülfswinkel betrachtet, die Grössen R, Φ, Θ so, dass den obigen Gleichungen genügt wird, mit der Bedingung, dass R positiv und der absolute Werth von Φ nicht grösser als $90°$ sei, was immer möglich ist. Dann ist nach 15)

$$\cos L = \cos(\Theta - 15\mathfrak{T}),\quad \sin L = \sin(\Theta - 15\mathfrak{T}):$$

und da nun immer L positiv und nicht grösser als $360°$ ist, so lassen vorstehende Formeln bei der Bestimmung von L nicht die geringste Zweideutigkeit zu.

Bezeichnen wir die Coordinaten des Orts, für welchen die Ephemeriden berechnet sind, durch (x), (y), (z), seine geographische oder geocentrische Breite durch (Φ), und den nach diesem Orte gezogenen Erdhalbmesser durch (R); so ist:

$$16)\quad \begin{cases} (x) = (R) \cos(\Phi) \cos 15\mathfrak{T}, \\ (y) = (R) \cos(\Phi) \sin 15\mathfrak{T}, \\ (z) = (R) \sin(\Phi); \end{cases}$$

also nach 15):

$$\cos L = \frac{x \cdot \dfrac{(x)}{(R)\cos(\Phi)} + y \cdot \dfrac{(y)}{(R)\cos(\Phi)}}{R\cos\Phi},$$

$$\sin L = -\frac{x \cdot \dfrac{(y)}{(R)\cos(\Phi)} - y \cdot \dfrac{(x)}{(R)\cos(\Phi)}}{R\cos\Phi};$$

folglich:

$$17)\quad \cos L = \frac{x(x) + y(y)}{R(R)\cos\Phi\cos(\Phi)},\quad \sin L = -\frac{x(y) - y(x)}{R(R)\cos\Phi\cos(\Phi)},\quad \operatorname{tang} L = -\frac{x(y) - y(x)}{x(x) + y(y)}.$$

Um nun aber die Coordinaten x, y, z selbst zu finden, muss man in den Formeln Cap. IV, Nr. 3) für a, b, c; a_1, b_1, c_1; α, β, γ respective a, a, b; $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$; φ, ψ, χ setzen, wodurch man für die gesuchten Coordinaten x, y, z die folgenden Formeln erhält:

$$18)\quad \left(\frac{\cos\varphi^2 + \cos\psi^2}{a^2} + \frac{\cos\chi^2}{b^2}\right)\frac{x - \mathfrak{x}}{\cos\varphi}$$
$$= \left(\frac{\cos\varphi^2 + \cos\psi^2}{a^2} + \frac{\cos\chi^2}{b^2}\right)\frac{y - \mathfrak{y}}{\cos\psi}$$
$$= \left(\frac{\cos\varphi^2 + \cos\psi^2}{a^2} + \frac{\cos\chi^2}{b^2}\right)\frac{z - \mathfrak{z}}{\cos\chi}$$
$$= -\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\cos\psi}{a^2} - \frac{\mathfrak{z}\cos\chi}{b^2}$$
$$\pm\sqrt{\frac{\cos\varphi^2 + \cos\psi^2}{a^2} + \frac{\cos\chi^2}{b^2} - \frac{(\mathfrak{x}\cos\psi - \mathfrak{y}\cos\varphi)^2}{a^2 a^2} - \frac{(\mathfrak{y}\cos\chi - \mathfrak{z}\cos\psi)^2 + (\mathfrak{z}\cos\varphi - \mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2 b^2}}.$$

Die einzelnen hierin vorkommenden Grössen wollen wir nun nach der Reihe einer etwas genaueren Betrachtung unterwerfen.

Zuerst ist

$$\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\cos\psi}{a^2} + \frac{\mathfrak{z}\cos\chi}{b^2} = \frac{\mathfrak{x}\cos\varphi + \mathfrak{y}\cos\psi + \mathfrak{z}\cos\chi}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\mathfrak{z}\cos\chi,$$

also

$$a^2\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi}{a^2}+\frac{\mathfrak{z}\cos\chi}{b^2}\right)=\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi+\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\ ^{1}).$$

Ferner ist

$$\frac{\cos\varphi^2+\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\cos\chi^2}{b^2}=\frac{\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2}{a^2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\chi^2$$

$$=\frac{1}{a^2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\chi^2,$$

also

$$a^2\left(\frac{\cos\varphi^2+\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\cos\chi^2}{b^2}\right)=1+\varepsilon^2\cos\chi^2.$$

Endlich ist

$$\frac{(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2}{a^2a^2}+\frac{(\mathfrak{y}\cos\chi-\mathfrak{z}\cos\psi)^2+(\mathfrak{z}\cos\varphi-\mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2b^2}$$

$$=\frac{(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2+(\mathfrak{y}\cos\chi-\mathfrak{z}\cos\psi)^2+(\mathfrak{z}\cos\varphi-\mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2b^2}$$

$$+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2$$

$$=\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi)^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2,$$

also

$$a^2\left\{\frac{(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2}{a^2a^2}+\frac{(\mathfrak{y}\cos\chi-\mathfrak{z}\cos\psi)^2+(\mathfrak{z}\cos\varphi-\mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2b^2}\right\}$$

$$=\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi)^2}{b^2}-\varepsilon^2\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi}{a}\right)^2$$

$$=(1+\varepsilon^2)\,\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-(\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi)^2}{a^2}-\varepsilon^2\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi}{a}\right)^2.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen:

$$19)\quad\left\{\begin{aligned}F&=\sqrt{\frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2}{a^2}}=\sqrt{\left(\frac{\mathfrak{x}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{y}}{a}\right)^2+\left(\frac{\mathfrak{z}}{a}\right)^2},\\G&=\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi}{a}=\frac{\mathfrak{x}}{a}\cos\varphi+\frac{\mathfrak{y}}{a}\cos\psi+\frac{\mathfrak{z}}{a}\cos\chi,\\H&=\frac{\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi}{a}=\frac{\mathfrak{x}}{a}\cos\psi-\frac{\mathfrak{y}}{a}\cos\varphi;\end{aligned}\right.$$

so ist nach dem Vorhergehenden:

$$a^2\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi}{a^2}+\frac{\mathfrak{z}\cos\chi}{b^2}\right)=aG+\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi,$$

$$a^2\left(\frac{\cos\varphi^2+\cos\psi^2}{a^2}+\frac{\cos\chi^2}{b^2}\right)=1+\varepsilon^2\cos\chi^2,$$

$$a^2\left\{\frac{(\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi)^2}{a^2a^2}+\frac{(\mathfrak{y}\cos\chi-\mathfrak{z}\cos\psi)^2+(\mathfrak{z}\cos\varphi-\mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2b^2}\right\}$$

$$=(1+\varepsilon^2)(F^2-G^2)-\varepsilon^2H^2=F^2-G^2+\varepsilon^2(F-G^2-H^2).$$

---

[1]) Über die Bedeutung von ε s. m. Denkschriften. Band VII, Cap. I, §. 3, Nr. 5).

Führt man diese Ausdrücke in die Formeln 18) ein, so erhält man nach einer ganz leichten Verwandlung:

$$20)\quad \frac{x-\mathfrak{x}}{\cos\varphi}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\psi}=\frac{\mathfrak{z}-z}{\cos\chi}$$

$$=\frac{-aG-\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\pm a\sqrt{1+\varepsilon^2\cos\chi^2-(1+\varepsilon^2)(F^2-G^2)+\varepsilon^2H^2}}{1+\varepsilon^2\cos\chi^2}$$

oder

$$21)\quad \frac{x-\mathfrak{x}}{\cos\varphi}=\frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\psi}=\frac{z-\mathfrak{z}}{\cos\chi}$$

$$=\frac{-aG-\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\pm a\sqrt{1-F^2+G^2+\varepsilon^2(\cos\chi^2-F^2+G^2+H^2)}}{1+\varepsilon^2\cos\chi^2};$$

also

$$22)\quad \begin{cases} x=\mathfrak{x}-\dfrac{aG+\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\mp a\sqrt{1-F^2+G^2+\varepsilon^2(\cos\chi^2-F^2+G^2+H^2)}}{1+\varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\varphi, \\ y=\mathfrak{y}-\dfrac{aG+\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\mp a\sqrt{1-F^2+G^2+\varepsilon^2(\cos\chi^2-F^2+G^2+H^2)}}{1+\varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\psi, \\ z=\mathfrak{z}-\dfrac{aG+\varepsilon^2\mathfrak{z}\cos\chi\mp a\sqrt{1-F^2+G^2+\varepsilon^2(\cos\chi^2-F^2+G^2+H^2)}}{1+\varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\chi. \end{cases}$$

Für die Grössen

$$aG=\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi \quad\text{und}\quad aH=\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi$$

lassen sich nun noch die folgenden Ausdrücke finden.

Nach 5) ist nämlich

$$aG=\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{\mathfrak{x}[BC]+\mathfrak{y}[CA]+\mathfrak{z}[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\},$$

also nach bekannten Relationen:

$$23)\quad aG=\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\cos\omega+\frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}.$$

Ferner ist nach 5)

$$aH=\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{\mathfrak{x}[CA]-\mathfrak{y}[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{(g-g_1)\mathfrak{x}-(f-f_1)\mathfrak{y}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\},$$

also nach bekannten Relationen:

$$24)\quad aH=-\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z})(h-h_1)-C\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}}+\frac{fg_1-gf_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\},$$

wo bekanntlich:

$$25)\quad \begin{cases} A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}=-\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}\sin\omega, \\ \sqrt{A^2+B^2+C^2}=E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}, \\ C=(fg_1-gf_1)E\cos\omega+\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}\sin\omega \end{cases}$$

ist.

Mittelst der vorhergehenden Formeln kann man für jeden zwischen 0 und 360° liegenden Werth von ω die Coordinaten x, y, z berechnen.

Man erhält aber für x, y, z im Allgemeinen jederzeit zwei Systeme von Werthen, die wir durch x, y, z und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ bezeichnen wollen. Es frägt sich nun, welcher von den Punkten (xyz) und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ die Bedeckung wirklich sieht, und welcher sie nicht sieht, da dieselbe offenbar nur von dem einen dieser Punkte wirklich gesehen werden kann. Dies lässt sich nach den folgenden Regeln beurtheilen, deren Gründe wir nicht weitläufig entwickeln wollen, da dieselben einem Jeden leicht von selbst einleuchten werden. Vorausgesetzt wird bei der Anwendung dieser Regeln, dass man die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 berechnet habe, wozu die erforderlichen Formeln in dem Obigen enthalten sind.

Äussere Berührung.

Man prüfe, ob (xyz) zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$ liegt oder nicht, was sich aus den Coordinaten dieser Punkte immer leicht erkennen lässt. Liegt nun (xyz) zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so sieht (xyz) die Bedeckung und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe nicht. Liegt (xyz) nicht zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so sieht (xyz) die Bedeckung nicht und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe.

Innere Berührung.

Man prüfe, ob $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ zwischen (xyz) und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ liegt oder nicht.

1. Es liege $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ zwischen (xyz) und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$.

Man prüfe, ob (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$ liegt oder nicht. Liegt (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so sieht (xyz) die Bedeckung und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe nicht. Liegt (xyz) nicht zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so sieht (xyz) die Bedeckung nicht und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe.

2. Es liege $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ nicht zwischen (xyz) und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$.

Man prüfe, ob $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ zwischen (xyz) und $(X_1 Y_1 Z_1)$ oder, was hier dasselbe ist, zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$ liegt oder nicht. Liegt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ zwischen (xyz) und $(X_1 Y_1 Z_1)$, und also auch zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so prüfe man, ob (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ liegt oder nicht; liegt nun (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$, so sieht (xyz) die Bedeckung und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe nicht; liegt dagegen (xyz) nicht zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$, so sieht (xyz) die Bedeckung nicht und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe. Liegt $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ nicht zwischen (xyz) und $(X_1 Y_1 Z_1)$, und also auch nicht zwischen $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und $(X_1 Y_1 Z_1)$, so prüfe man, ob (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ liegt oder nicht; liegt nun (xyz) zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$, so sieht (xyz) die Bedeckung nicht und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe; liegt dagegen (xyz) nicht zwischen $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$ und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$, so sieht (xyz) die Bedeckung und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ sieht dieselbe nicht [1]).

Ob eine äussere Berührung dem Eintritte oder dem Austritte, eine innere Berührung dem Anfange oder dem Ende der ringförmigen Bedeckung entspricht, wird man hier ganz ebenso beurtheilen, wie in den Denkschriften, Band VII, Cap. III, §. 1, gelehrt worden ist, wobei man zu beachten hat, dass man nach dem Vorhergehenden den Ort auf der Erdoberfläche kennt, von welchem aus die Bedeckung gesehen wird.

Wenn wir die Erde als eine mit dem Halbmesser a beschriebene Kugel betrachten, so ist $\varepsilon = 0$, und nach dem Obigen hat man also in diesem Falle zur Bestimmung von x, y, z die folgenden Formeln:

$$26)\qquad \frac{x-\mathfrak{x}}{\cos\varphi} = \frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\psi} = \frac{z-\mathfrak{z}}{\cos\chi} = -a(G \pm \sqrt{1-F^2+G^2})$$

---

[1]) Wenn überhaupt drei Punkte durch die Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' bestimmt sind, so liegt der Punkt (x', y', z') zwischen (xyz) und $(x''\,y''\,z'')$, wenn $x'-x$ und $x'-x''$ ungleiche Vorzeichen haben; dagegen liegt $(x'\,y'\,z')$ nicht zwischen (xyz) und $(x''\,y''\,z'')$, wenn $x'-x$ und $x'-x''$ gleiche Vorzeichen haben. Ähnliches gilt natürlich auch von den anderen Coordinaten.

oder

$$27)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} - a\,(G \mp \sqrt{1 - F^2 + G^2})\,\cos\varphi, \\ y = \mathfrak{y} - a\,(G \mp \sqrt{1 - F^2 + G^2})\,\cos\psi, \\ z = \mathfrak{z} - a\,(G \mp \sqrt{1 - F^2 + G^2})\,\cos\chi; \end{cases}$$

wo F und G die aus dem Obigen bekannten Werthe haben.

§. 3.

Wir wollen jetzt den Ort auf der Erdoberfläche bestimmen, welcher in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente, dem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, eine Berührung der beiden Weltkörper in seinem Horizonte sieht.

Da dies offenbar der Punkt der Erdoberfläche ist, in welchem dieselbe von der durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1 Y_1 Z_1)$ gehenden geraden Linie berührt wird, so haben wir nach 22) im vorhergehenden Paragraphen, weil die beiden Durchschnittspunkte der in Rede stehenden geraden Linie mit der Erdoberfläche in einen Punkt zusammenfallen müssen, in den dort eingeführten Zeichen offenbar die folgende Bedingungsgleichung:

$$28)\quad 1 - F^2 + G^2 + \varepsilon^2 (\cos\chi^2 - F^2 + G^2 + H^2) = 0,$$

welche blos die eine unbekannte Grösse ω enthält. Bestimmen wir daher ω mittelst dieser Gleichung, und berechnen dann die entsprechenden Werthe der Grössen G und φ, ψ, χ mittelst der aus dem Vorhergehenden bekannten Formeln, so haben wir nach 22) für die Coordinaten x, y, z des gesuchten Ortes die folgenden Formeln:

$$29)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} - \dfrac{aG + \varepsilon^2 \mathfrak{z}\cos\chi}{1 + \varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\varphi, \\ y = \mathfrak{y} - \dfrac{aG + \varepsilon^2 \mathfrak{z}\cos\chi}{1 + \varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\psi, \\ z = \mathfrak{z} - \dfrac{aG + \varepsilon^2 \mathfrak{z}\cos\chi}{1 + \varepsilon^2\cos\chi^2}\cos\chi; \end{cases}$$

woraus dann ferner die Länge L und die Breite Φ des gesuchten Ortes nach der im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Anweisung gefunden werden können.

Lässt man die Zeit $\mathfrak{T}$ sich stetig verändern, so kann man mittelst der vorhergehenden Rechnungsvorschriften die Curven auf der Erdoberfläche ermitteln, wo eine Berührung der beiden Weltkörper im Horizonte gesehen wird.

Betrachtet man die Erde als eine Kugel von dem Halbmesser a, so ist $\varepsilon = 0$, und die Gleichung 28), aus welcher ω bestimmt werden muss, nimmt also in diesem Falle die einfache Form

$$30)\quad 1 - F^2 + G^2 = 0 \quad \text{oder} \quad F^2 - G^2 = 1$$

an; die Coordinaten x, y, z des gesuchten Ortes sind aber:

$$31)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} - aG\cos\varphi, \\ y = \mathfrak{y} - aG\cos\psi, \\ z = \mathfrak{z} - aG\cos\chi. \end{cases}$$

Diesen Fall der kugelförmigen Erde wollen wir nun zuerst etwas näher betrachten.

Die Gleichung 30), aus welcher in diesem Falle ω bestimmt werden muss, ist nach 19) und 23), wenn man die dortigen Ausdrücke von F und G in dieselbe einführt:

$$a^2 - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z})^2 + \left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E} \cos\omega \\ + \frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1} \sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2} \end{array} \right\}^2 = 0,$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich für $\cos\omega$ der folgende völlig entwickelte Ausdruck:

$$32)\qquad \cos\omega = -\frac{E}{r-r_1} \cdot \frac{\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2} \mp E\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2}}{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}.$$

Wegen des doppelten Zeichens in dieser Formel, und weil ω nur zwischen den Grenzen 0 und 360° eingeschlossen ist, führt dieselbe offenbar im Allgemeinen immer zu vier Werthen von ω. Für aG erhält man nach 23) den folgenden Ausdruck:

$$aG = \pm\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},$$

und zur Bestimmung der Coordinaten x, y, z hat man daher die folgenden Formeln:

$$33)\qquad \left\{ \begin{array}{l} x = \mathfrak{x} \mp \cos\varphi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2}, \\ y = \mathfrak{y} \mp \cos\psi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2}, \\ z = \mathfrak{z} \mp \cos\chi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2}. \end{array} \right.$$

Die Gleichung, aus welcher ω bestimmt werden muss, wollen wir nun auch für die ellipsoidische Erde weiter entwickeln. Zu dem Ende führen wir diese Gleichung auf ihre ursprüngliche Form, nämlich auf die Form

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\cos\varphi^2+\cos\psi^2}{a^2} + \frac{\cos\chi^2}{b^2} \\ -\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi}{a^2}\right)^2 - \frac{(\mathfrak{y}\cos\chi-\mathfrak{z}\cos\psi)^2+(\mathfrak{z}\cos\varphi-\mathfrak{x}\cos\chi)^2}{a^2b^2} \end{array} \right\} = 0.$$

oder auf die Form

$$\left. \begin{array}{l} \frac{b^2-(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)}{a^2b^2} + \left(\frac{\mathfrak{x}\cos\varphi+\mathfrak{y}\cos\psi+\mathfrak{z}\cos\chi}{ab}\right)^2 \\ -\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left\{\cos\chi^2+\left(\frac{\mathfrak{x}\cos\psi-\mathfrak{y}\cos\varphi}{a}\right)^2\right\} \end{array} \right\} = 0,$$

zurück. Führt man nun in diese Gleichung für $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ die Ausdrücke Cap. V. §. 1, Nr. 5) ein, so erhält man die Gleichung:

$$0 = \left(\frac{E}{r-r_1}\right)^2 \cdot \frac{b^2-(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)}{a^2b^2}$$

$$+\frac{1}{a^2b^2}\left\{\frac{\mathfrak{x}[BC]+\mathfrak{y}[CA]+\mathfrak{z}[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2$$

$$-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\left\{ \begin{array}{l} \left\{\frac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} + \frac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2 \\ +\frac{1}{a^2}\left\{\frac{\mathfrak{x}[CA]-\mathfrak{y}[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} - \frac{fg_1-gf_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2 \end{array} \right\}.$$

Nun ist aber nach bekannten Relationen:

$$A^2 + B^2 + C^2 = PE^2,$$

$$\mathfrak{x}[BC] + \mathfrak{y}[CA] + \mathfrak{z}[AB] = PE\cos\omega,$$

$$[AB] = E\{(fg_1 - gf_1)E\sin\omega - W\cos\omega\}.$$

$$\mathfrak{x}[CA] - \mathfrak{y}[BC]$$

$$= (h-h_1)P\sin\omega + \{(f-f_1)\mathfrak{x} + (g-g_1)\mathfrak{y} + (h-h_1)\mathfrak{z}\}\{(fg_1 - gf_1)E\cos\omega + W\sin\omega\};$$

wo E, P, W ihre aus dem Obigen bekannte Bedeutung haben. Setzen wir nun der Kürze wegen noch

34) $$J = (f-f_1)\mathfrak{x} + (g-g_1)\mathfrak{y} + (h-h_1)\mathfrak{z},$$

so wird:

$$\frac{\mathfrak{x}[BC] + \mathfrak{y}[CA] + \mathfrak{z}[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{\sqrt{P}}{E}\cos\omega,$$

$$\frac{[AB]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{fg_1 - gf_1}{\sqrt{P}}\sin\omega - \frac{W}{E\sqrt{P}}\cos\omega,$$

$$\frac{\mathfrak{x}[CA] - \mathfrak{y}[BC]}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \left\{\frac{(h-h_1)\sqrt{P}}{E^2} + \frac{JW}{E^2\sqrt{P}}\right\}\sin\omega + \frac{(fg_1 - gf_1)J}{E\sqrt{P}}\cos\omega;$$

und daher unsere obige Gleichung:

$$0 = \left(\frac{E}{r-r_1}\right)^2 \cdot \frac{b^2 - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)}{a^2 b^2}$$

$$+ \frac{1}{a^2 b^2}\left\{\frac{\sqrt{P}}{E}\cos\omega + \frac{J}{r-r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2$$

$$-\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)\left\{\begin{array}{l}\left\{\frac{fg_1 - gf_1}{\sqrt{P}}\sin\omega - \frac{W}{E\sqrt{P}}\cos\omega + \frac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2 \\ + \frac{1}{a^2}\left\{\left\{\frac{(h-h_1)\sqrt{P}}{E^2} + \frac{JW}{E^2\sqrt{P}}\right\}\sin\omega + \frac{(fg_1 - gf_1)J}{E\sqrt{P}}\cos\omega - \frac{fg_1 - gf_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}\right\}^2\end{array}\right\}.$$

Der von $\sin\omega$ und $\cos\omega$ unabhängige Theil dieser Gleichung ist, wie man nach einigen Reductionen leicht findet:

$$\left(\frac{E}{r-r_1}\right)^2 \cdot \frac{b^2 - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)}{a^2 b^2}$$

$$+ \frac{1}{a^2 b^2}\left\{J^2 + e^2\{a^2(h-h_1)^2 + (fg_1 - gf_1)^2\}\right\}\left\{\left(\frac{1}{r-r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2\right\}.$$

Der Factor von $\sin\omega$ ist:

$$2\,\frac{e^2}{a^2 b^2} \cdot \frac{fg_1 - gf_1}{\sqrt{P}}\left\{a^2(h-h_1) - \frac{1}{E^2}\{(h-h_1)P + JW\}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{r-r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2}.$$

Der Factor von $\sin\omega^2$ ist:

$$\frac{e^2}{a^2 b^2 P}\left\{a^2(fg_1 - gf_1)^2 + \frac{1}{E^4}\{(h-h_1)P + JW\}^2\right\}.$$

Der Factor von $\cos\omega$ ist:

$$\frac{2}{a^2 b^2 E\sqrt{P}}\left\{JP - e^2\{a^2(h-h_1)W + (fg_1 - gf_1)^2 J\}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{r-r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2}.$$

Der Factor von $\cos\omega^2$ ist:

$$\frac{1}{a^2 b^2 PE^2}\left\{P^2 + e^2\{a^2 W^2 + (fg_1 - gf_1)^2 J^2\}\right\}.$$

Der Factor von $\sin\omega \cos\omega$ ist:

$$-2\frac{e^2}{a^2 b^2}\cdot\frac{fg_1 - gf_1}{PE}\left\{a^2 W - \frac{J}{E^2}\{(h - h_1)P + JW\}\right\}.$$

Also ist unsere obige Gleichung zur Bestimmung von ω, wenn man dieselbe mit $a^2\, b^2$ multiplicirt:

$$\begin{aligned}
35)\qquad 0 = &\{b^2 - (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\}\left(\frac{E}{r - r_1}\right)^2 \\
&+ \left\{J^2 + e^2\{a^2(h - h_1)^2 + (fg_1 - gf_1)^2\}\right\}\left\{\left(\frac{1}{r - r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2\right\} \\
&+ \frac{2}{E\sqrt{P}}\left\{JP - e^2\{a^2(h - h_1)W + (fg_1 - gf_1)^2 J\}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{r - r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2}\cdot\cos\omega \\
&+ 2e^2\frac{fg_1 - gf_1}{\sqrt{P}}\left\{a^2(h - h_1) - \frac{1}{E^2}\{(h - h_1)P + JW\}\right\}\sqrt{\left(\frac{1}{r - r_1}\right)^2 - \left(\frac{1}{E}\right)^2}\cdot\sin\omega \\
&+ \frac{1}{PE^2}\left\{P^2 + e^2\{a^2 W^2 + (fg_1 - gf_1)^2 J^2\}\right\}\cos\omega^2 \\
&- 2e^2\frac{fg_1 - gf_1}{PE}\left\{a^2 W - \frac{J}{E^2}\{(h - h_1)P + JW\}\right\}\sin\omega\cos\omega \\
&+ \frac{e^2}{P}\left\{a^2(fg_1 - gf_1)^2 + \frac{1}{E^4}\{(h - h_1)P + JW\}^2\right\}\sin\omega^2.
\end{aligned}$$

Wie Gleichungen dieser Art aufzulösen sind, ist bekannt. Man kann nämlich entweder

$$\cos\omega = \frac{1 - tang\,\frac{1}{2}\omega^2}{1 + tang\,\frac{1}{2}\omega^2},\qquad \sin\omega = \frac{2\,tang\,\frac{1}{2}\omega}{1 + tang\,\frac{1}{2}\omega^2}$$

setzen, wodurch man eine Gleichung des vierten Grades mit der unbekannten Grösse $tang\,{}^1/_2\,\omega$ erhält. Oder man kann die Grösse auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens in 35) in zwei Factoren von der Form

$$\varkappa + \lambda\cos\omega + \mu\sin\omega,\qquad \varkappa_1 + \lambda_1\cos\omega + \mu_1\sin\omega$$

zerlegen, wo $\varkappa$, λ, μ und $\varkappa_1$, λ_1, μ_1 allein aus den Coëfficienten der gegebenen Gleichung bestimmt werden, was dann zu den beiden Gleichungen

$$\varkappa + \lambda\cos\omega + \mu\sin\omega = 0,\qquad \varkappa_1 + \lambda_1\cos\omega + \mu_1\sin\omega = 0$$

führt, aus denen ω leicht mittelst eines Hülfswinkels auf bekannte Weise bestimmt werden kann. Beide Methoden führen auf die Auflösung einer cubischen Hülfsgleichung; indess scheint die zweite Methode etwas leichter zu sein, als die erste.

Hat man ω auf diese Weise gefunden, so ergeben sich x, y, z mittelst der Formeln 29), wie schon aus dem Obigen bekannt ist. Führen wir indess e statt ε in diese Formeln ein, so erhalten wir:

$$36)\qquad \left\{\begin{aligned}
x &= \mathfrak{x} - \frac{(1 - e^2)\,aG + e^2\,\mathfrak{z}\cos\chi}{1 - e^2\sin\chi^2}\cos\varphi, \\
y &= \mathfrak{y} - \frac{(1 - e^2)\,aG + e^2\,\mathfrak{z}\cos\chi}{1 - e^2\sin\chi^2}\cos\psi, \\
z &= \mathfrak{z} - \frac{(1 - e^2)\,aG + e^2\,\mathfrak{z}\cos\chi}{1 - e^2\sin\chi^2}\cos\chi;
\end{aligned}\right.$$

oder

$$37)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a} = \dfrac{\mathfrak{x}}{a} - \dfrac{(1-e^2)\,G + e^2\,\frac{\mathfrak{z}}{a}\cos\chi}{1-e^2\sin\chi^2}\cos\varphi, \\[2ex] \dfrac{y}{a} = \dfrac{\mathfrak{y}}{a} - \dfrac{(1-e^2)\,G + e^2\,\frac{\mathfrak{z}}{a}\cos\chi}{1-e^2\sin\chi^2}\cos\psi, \\[2ex] \dfrac{z}{a} = \dfrac{\mathfrak{z}}{a} - \dfrac{(1-e^2)\,G + e^2\,\frac{\mathfrak{z}}{a}\cos\chi}{1-e^2\sin\chi^2}\cos\chi. \end{cases}$$

§. 4.

Man kann sich auch die Frage vorlegen, welche Orte auf der Erdoberfläche in dem absoluten Zeitmomente, das wir hier immer ins Auge fassen, eine Berührung der beiden Weltkörper im Meridiane sehen. Diese Frage lässt sich auf folgende Art beantworten.

Wenn nämlich die durch die Gleichungen

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{\cos\varphi} = \frac{y-\mathfrak{y}}{\cos\psi} = \frac{z-\mathfrak{z}}{\cos\chi}$$

charakterisirte gerade Linie in dem Meridiane irgend eines Orts auf der Erdoberfläche liegen soll, so muss sie durch die Axe der z gehen, was die Bedingungsgleichung

$$\frac{\mathfrak{x}}{\cos\varphi} = \frac{\mathfrak{y}}{\cos\psi} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{x}\cos\psi - \mathfrak{y}\cos\varphi = 0$$

giebt. Nach 19) und 24) ist diese Bedingungsgleichung:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{(A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z})\,(h-h_1) - C\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}}{E\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ + \dfrac{fg_1-fg_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2} \end{matrix}\right\} = 0.$$

Bekanntlich ist aber:

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z} = -\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}\sin\omega.$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2},$$

$$C = \{(f-f_1)\,(hf_1-fh_1)-(g-g_1)\,(gh_1-hg_1)\}\sin\omega + (fg_1-gf_1)\,E\cos\omega:$$

folglich die obige Gleichung:

$$E^2\,\frac{fg_1-gf_1}{r-r_1}\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}\,.\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}$$

$$= \left\{\begin{matrix} (h-h_1)\,\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\} \\ +\{(f-f_1)\,(hf_1-fh_1)-(g-g_1)\,(gh_1-hg_1)\}\,\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\} \end{matrix}\right\}\sin\omega$$

$$+ (fg_1-gf_1)\,E\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}\cos\omega.$$

Berechnet man nun den Hülfswinkel $\bar{\omega}$ mittelst der Formel:

$$38)\quad \tan\bar{\omega} = \frac{\left\{\begin{matrix} (h-h_1)\,\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\} \\ +\{(f-f_1)\,(hf_1-fh_1)-(g-g_1)\,(gh_1-hg_1)\}\,\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\} \end{matrix}\right\}}{(fg_1-gf_1)\,E\,\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}},$$

oder mittelst der Formel:

$$39)\qquad tang\,\bar{\omega} = \frac{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)}{(fg_1-gf_1)E}$$
$$+\frac{(h-h_1)\{(fg-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}}{(fg_1-gf_1)\,E\,\{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}\}};$$

so erhält man zur Berechnung von ω die Formel:

$$40)\qquad cos(\bar{\omega}-\omega) = cos\,\bar{\omega}\,\frac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}\sqrt{\left(\frac{E}{r-r_1}\right)^2-1}.$$

Mittelst der Gleichungen 39) und 40) findet man ω, und wie man dann weiter die Coordinaten x, y, z des gesuchten Orts findet, unterliegt nach dem Obigen keinem Zweifel, und bedarf hier keiner weitern Erläuterung. Auch über die Beantwortung aller andern Fragen, welche hier noch aufgestellt werden könnten, ob z. B. die Berührung über oder unter dem Horizonte des Orts (xyz) stattfindet, ob dieselbe dem Anfange oder Ende der Bedeckung, dem Anfange oder Ende der ringförmigen Bedeckung entspricht, ist schon früher bei anderer Gelegenheit [1]) alles Nöthige gesagt worden, was hier in ganz ähnlicher Weise Anwendung findet, und daher nicht wiederholt werden soll.

§. 5.

Von vorzüglicher Wichtigkeit ist es nun ferner, die Zeiten kennen zu lernen, wo die Erdoberfläche von den die beiden Weltkörper einhüllenden Kegelflächen berührt wird, und die Orte auf der Erdoberfläche zu bestimmen, wo diese Berührungen stattfinden. Denn es leuchtet ein, dass man dadurch zugleich die Zeiten des Anfangs und Endes der Bedeckung auf der Erde überhaupt, auch die Zeiten des Anfangs und Endes der ringförmigen Bedeckung auf der Erde überhaupt kennen lernt.

Wir wollen diese Aufgabe zuerst unter der Voraussetzung auflösen, dass die Erde eine Kugel sei. Unter dieser Voraussetzung wird in dem gesuchten Zeitmomente der Ort (xyz) auf der Erdoberfläche, wo deren Berührung mit einer der beiden einhüllenden Kegelflächen stattfindet, offenbar eine Berührung der beiden Weltkörper in seinem Horizonte sehen, und zugleich wird die durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gelegte Ebene, in welcher die durch die Punkte $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1 Y_1 Z_1)$ gehende gerade Linie liegt, durch den Mittelpunkt der Erde gehen, d. h. es wird $cos\,\omega = \pm 1$, $sin\,\omega = 0$ sein. Man wird also die Gleichung, aus welcher die gesuchte Zeit $\mathfrak{T}$ bestimmt werden muss, finden, wenn man in der Gleichung

$$a^2-(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2)+\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2\left\{\begin{matrix}\dfrac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\,cos\,\omega\\ +\dfrac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\end{matrix}\right\}^2=0.$$

welche uns aus §. 3 bekannt ist, $cos\,\omega = \pm 1$ setzt, was die Gleichung

$$\left(\frac{E}{r-r_1}\right)^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2)=\left\{\begin{matrix}\dfrac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\\ \pm\dfrac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\end{matrix}\right\}^2,$$

[1]) M. s. Denkschriften. Band VII.

also die vier Gleichungen:

$$41)\quad \left\{\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}\dfrac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\\[2ex] +\dfrac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\end{array}\right\} = \pm\dfrac{E}{r-r_1}\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},\\[6ex]
\left.\begin{array}{l}\dfrac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}\\[2ex] -\dfrac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\end{array}\right\} = \pm\dfrac{E}{r-r_1}\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2}
\end{array}\right.$$

giebt, deren zwei erste dem Werthe $\cos\omega=+1$, die zwei letzten dem Werthe $\cos\omega=-1$ entsprechen.

Da diese Gleichungen in Bezug auf die Zeit $\mathfrak{T}$ als unbekannte Grösse, von welcher f, g, h und f_1, g_1, h_1, und daher auch E, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ abhängen, transcendent sind, so ist deren Auflösung nur durch Näherung möglich, und man muss sich dabei der hinreichend bekannten Näherungsmethode bedienen, deren weitere Erläuterung nicht hierher gehört.

Für $\cos\omega=+1$ ist nach 23):

$$aG=\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}+\frac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\right\},$$

also nach den beiden ersten der Gleichungen 41) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$42)\qquad aG=\pm\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},$$

und folglich nach 31):

$$43)\qquad \left\{\begin{array}{l}
x=\mathfrak{x}\mp\cos\varphi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},\\
y=\mathfrak{y}\mp\cos\psi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},\\
z=\mathfrak{z}\mp\cos\chi\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2};
\end{array}\right.$$

wo, wegen $\cos\omega=+1$, $\sin\omega=0$, nach 11):

$$44)\quad \left\{\begin{array}{l}
\cos\varphi=\dfrac{r-r_1}{E}\left\{\dfrac{f-f_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}-\dfrac{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\right\},\\[3ex]
\cos\psi=\dfrac{r-r_1}{E}\left\{\dfrac{g-g_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}-\dfrac{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\right\},\\[3ex]
\cos\chi=\dfrac{r-r_1}{E}\left\{\dfrac{h-h_1}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\dfrac{r-r_1}{E}\right)^2}-\dfrac{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)}{E\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}\right\}
\end{array}\right.$$

ist.

Für $\cos\omega=-1$ ist nach 23):

$$aG=\frac{r-r_1}{E}\left\{\frac{(f-f_1)\mathfrak{x}+(g-g_1)\mathfrak{y}+(h-h_1)\mathfrak{z}}{r-r_1}\sqrt{1-\left(\frac{r-r_1}{E}\right)^2}-\frac{\sqrt{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2}}{E}\right\},$$

also nach den beiden letzten der Gleichungen 41) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$45)\qquad aG=\pm\sqrt{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2-a^2},$$

und folglich nach 31):

$$46)\quad \begin{cases} x = \mathfrak{x} \mp \cos\varphi \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 - a^2}, \\ y = \mathfrak{y} \mp \cos\psi \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 - a^2}, \\ z = \mathfrak{z} \mp \cos\chi \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 - a^2}; \end{cases}$$

wo, wegen $\cos\omega = -1$, $\sin\omega = 0$, nach 11):

$$47)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \frac{r - r_1}{E}\left\{\frac{f - f_1}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} + \frac{(g - g_1)(fg_1 - gf_1) - (h - h_1)(hf_1 - fh_1)}{E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}}\right\}, \\ \cos\psi = \frac{r - r_1}{E}\left\{\frac{g - g_1}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} + \frac{(h - h_1)(gh_1 - hg_1) - (f - f_1)(fg_1 - gf_1)}{E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}}\right\}, \\ \cos\chi = \frac{r - r_1}{E}\left\{\frac{h - h_1}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} + \frac{(f - f_1)(hf_1 - fh_1) - (g - g_1)(gh_1 - hg_1)}{E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}}\right\} \end{cases}$$

ist.

Wenn man die Erde als Ellipsoid betrachtet, so wird die Auflösung der vorhergehenden Aufgabe viel weitläufiger. Die zu erfüllenden Bedingungen sind dieselben wie vorher, mit dem Unterschiede, dass die durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gelegte Ebene, in der die durch die Punkte $(\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z})$, (XYZ), $(X_1\,Y_1\,Z_1)$ gehende gerade Linie liegt, nicht durch den Mittelpunkt der Erde, sondern durch die Normale des gesuchten Orts (xyz) gehen muss.

Weil aber

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder} \quad \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0$$

ist, so ist, wenn wir die Grösse auf der linken Seite des Gleichheitszeichens in dieser Gleichung durch s bezeichnen:

$$\frac{d_x s}{dx} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{d_y s}{dy} = \frac{2y}{a^2}, \quad \frac{d_z s}{dz} = \frac{2z}{b^2}$$

wo die Differentialquotienten partielle sind. Also sind, wenn wir die veränderlichen oder laufenden Coordinaten durch (x), (y), (z) bezeichnen,

$$\frac{(x) - x}{\frac{2x^1}{a^2}} = \frac{(y) - y}{\frac{2y}{a^2}} = \frac{(z) - z}{\frac{2z}{b^2}}$$

oder

$$\frac{a^2\{(x) - x\}}{x} = \frac{a^2\{(y) - y\}}{y} = \frac{b^2\{(z) - z\}}{z}$$

die Gleichungen der dem Punkte (xyz) entsprechenden Normale des Erd-Ellipsoides. Weil nun die durch die Gleichung

$$A(x) + B(y) + C(z) + D = 0$$

charakterisirte Ebene, wo A, B, C, D die aus Cap. I, §. 3, Nr. 19) bekannten Werthe haben, durch den Punkt (xyz) gehen soll, so ist

$$A\{(x) - x\} + B\{(y) - y\} + C\{(z) - z\} = 0,$$

und folglich, weil in dieser Ebene die Normale des Punktes (xyz) liegen soll:

$$\left(A + B\frac{y}{x} + C\frac{a^2 z}{b^2 x}\right)\{(x) - x\} = 0$$

für jedes (x), also

$$A + B\frac{y}{x} + C\frac{a^2 z}{b^2 x} = 0,$$

oder

$$\frac{b^2}{a^2}(Ax + By) + Cz = (1 - e^2)(Ax + By) + Cz = 0,$$

oder

48) $$Ax + By + Cz - e^2(Ax + By) = 0,$$

welche Gleichung mit der Gleichung 35) in §. 3 zu verbinden, und die Rechnung auf folgende Art zu führen ist.

Man lasse sich $\mathfrak{T}$ stetig verändern [1]), und bestimme für die einzelnen Werthe von $\mathfrak{T}$ die entsprechenden Werthe von ω mittelst der Gleichung 35). Hierauf berechne man den Werth von aG mittelst der Formel 23), die Winkel φ, ψ, χ mittelst der Formeln 11), die Coordinaten x, y, z mittelst der Formeln 29) oder 37), und die Grössen A, B, C mittelst der Formeln Cap. I, §. 3, Nr. 19). Nun führe man die gefundenen Werthe von x, y, z und A, B, C in die Gleichung 48) ein, und sehe zu, ob dieselbe erfüllt wird. Die Werthe von $\mathfrak{T}$ und x, y, z für welche dies der Fall ist, sind die gesuchten.

Leichter als das vorhergehende Verfahren scheint mir aber das folgende zu sein. Man bestimme zuerst nach der oben gegebenen Anweisung für die als eine Kugel betrachtete Erde die Zeit $\mathfrak{T}$ und die Coordinaten x, y, z, so wie auch aus den letzteren auf bekannte Weise die Länge und Breite des Orts (xyz). Dann wird es nie Schwierigkeiten haben, die kleinen Veränderungen zu ermitteln, welche die auf diese Weise gefundene Zeit, Länge und Breite erleiden müssen, damit die in den Denkschriften, Band VII, Cap. III, §. 8, Nr. I, aufgestellten drei Gleichungen vollständig erfüllt werden; denn die Zeit, Länge und Breite, für welche dies der Fall ist, werden die gesuchten sein. Diese letztere Auflösung unsers Problems in dem Falle der ellipsoidischen Erde scheint mir unter allen die einfachste zu sein.

§. 6.

Wir wollen nun den Ort auf der Erdoberfläche zu bestimmen suchen, der in dem gegebenen absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, eine Berührung der beiden Weltkörper als Maximum der Bedeckung sieht.

Sei (xyz) dieser Ort und Δ^1 die demselben entsprechende scheinbare Entfernung der beiden Weltkörper von einander, deren Entfernungen von dem Orte (xyz) durch ρ^1 und ρ^1_1 bezeichnet werden sollen, Alles natürlich auf die Sternzeit $\mathfrak{T}$ bezogen. Dann ist

49) $$\cos\Delta^1 = \frac{\rho^{1^2} + \rho_1{}^{1^2} - E^2}{2\rho^1\rho_1{}^1}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

50) $$\mathfrak{P} = -\frac{aG + \varepsilon^2 z\cos\chi \mp a\sqrt{1 - F^2 + G^2 + \varepsilon^2(\cos\chi^2 - F^2 + G^2 + H^2)}}{1 + \varepsilon^2\cos\chi^2},$$

wo die Ausdrücke von F, G, H und $\cos\chi$ durch ω aus §. 1 und §. 2 bekannt sind; so ist nach 22):

51) $$\frac{x - \mathfrak{x}}{\cos\varphi} = \frac{y - \mathfrak{y}}{\cos\psi} = \frac{z - \mathfrak{z}}{\cos\chi} = \mathfrak{P},$$

---

[1]) Wie man diesen Ausdruck, d. h. eine stetige Veränderung, bei Näherungsrechnungen zu verstehen hat, bedarf hier keiner weiteren Erläuterung.

und man muss nun offenbar ω so bestimmen, dass

$$\frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{T}} = 0$$

ist. Ist dies geschehen, so ergeben sich die Coordinaten x, y, z des gesuchten Orts mittelst der vorhergehenden Gleichungen 51) von selbst.

Aus der Gleichung 49) ergiebt sich

$$2\rho^1\rho_1{}^1 \cos\Delta^1 = \rho^{1^2} + \rho_1{}^{1^2} - E^2,$$

also

$$-\rho^1\rho^1{}_1 \sin\Delta^1 \frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{T}} + \cos\Delta^1\left(\rho^1\frac{d\rho_1{}^1}{d\mathfrak{T}} + \rho^1{}_1\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}}\right) = \rho^1\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}} + \rho^1{}_1\frac{d\rho^1{}_1}{d\mathfrak{T}} - E\frac{dE}{d\mathfrak{T}},$$

folglich für $\frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{T}} = 0$, wenn man zugleich für $\cos\Delta^1$ den Ausdruck 49) einführt, nach einigen leichten Reductionen:

$$52)\qquad \rho_1{}^1(\rho^{1^2} - \rho_1{}^{1^2} + E^2)\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}} + \rho^1(\rho_1{}^{1^2} - \rho^{1^2} + E^2)\frac{d\rho_1{}^1}{d\mathfrak{T}} - 2\rho^1\rho_1{}^1 E\frac{dE}{d\mathfrak{T}} = 0,$$

oder, weil

$$\rho^{1^2} - \rho_1{}^{1^2} + E^2 = 2\rho^1(\rho^1 - \rho^1{}_1\cos\Delta^1),$$

$$\rho_1{}^{1^2} - \rho^{1^2} + E^2 = 2\rho_1{}^1(\rho_1{}^1 - \rho^1\cos\Delta^1)$$

ist:

$$53)\qquad (\rho^1 - \rho^1{}_1\cos\Delta^1)\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}} + (\rho^1{}_1 - \rho^1\cos\Delta^1)\frac{d\rho^1{}_1}{d\mathfrak{T}} - E\frac{dE}{d\mathfrak{T}} = 0.$$

Nach 51) ist

$$x = \mathfrak{x} + \mathfrak{P}\cos\varphi,\quad y = \mathfrak{y} + \mathfrak{P}\cos\psi,\quad z = \mathfrak{z} + \mathfrak{P}\cos\chi;$$

also

$$\begin{aligned} x - f &= \mathfrak{x} - f + \mathfrak{P}\cos\varphi, &\text{ und }\quad x - f_1 &= \mathfrak{x} - f_1 + \mathfrak{P}\cos\varphi,\\ y - g &= \mathfrak{y} - g + \mathfrak{P}\cos\psi, & y - g_1 &= \mathfrak{y} - g_1 + \mathfrak{P}\cos\psi,\\ z - h &= \mathfrak{z} - h + \mathfrak{P}\cos\chi; & z - h_1 &= \mathfrak{z} - h_1 + \mathfrak{P}\cos\chi;\end{aligned}$$

folglich nach bekannten Relationen:

$$\begin{aligned}\rho^{1^2} = &\ (\mathfrak{x} - f)^2 + (\mathfrak{y} - g)^2 + (\mathfrak{z} - h^2) + \mathfrak{P}^2\\ &+ 2\mathfrak{P}\{(\mathfrak{x} - f)\cos\varphi + (\mathfrak{y} - g)\cos\psi + (\mathfrak{z} - h)\cos\chi\}\\ = &\ \left(\frac{rE}{r - r_1}\right)^2 + \mathfrak{P}^2 - 2\mathfrak{P}\frac{rE}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2},\\ \rho_1{}^{1^2} = &\ (\mathfrak{x} - f_1)^2 + (\mathfrak{y} - g_1)^2 + (\mathfrak{z} - h_1)^2 + \mathfrak{P}^2\\ &+ 2\mathfrak{P}\{(\mathfrak{x} - f_1)\cos\varphi + (\mathfrak{y} - g_1)\cos\psi + (\mathfrak{z} - h_1)\cos\chi\}\\ = &\ \left(\frac{r_1 E}{r - r_1}\right)^2 + \mathfrak{P}^2 - 2\mathfrak{P}\frac{r_1 E}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2};\end{aligned}$$

also, wie man leicht findet:

$$\begin{aligned}\rho^{1^2} &= r^2 + \left\{\mathfrak{P} - \frac{rE}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}^2\\ &= \left\{\frac{(r - r_1)\mathfrak{P}}{E}\right\}^2 + \left\{\frac{rE}{r - r_1} - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}^2,\end{aligned}$$

$$\rho_1^{1^2} = r_1^2 + \left\{\mathfrak{P} - \frac{r_1 E}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}^2$$

$$= \left\{\frac{(r - r_1)\mathfrak{P}}{E}\right\}^2 + \left\{\frac{r_1 E}{r - r_1} - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}^2.$$

Setzen wir

54) $$\mathfrak{Q} = \frac{E}{r - r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2},$$

so wird:

55) $$\rho^{1^2} = r^2 + (\mathfrak{P} - r\mathfrak{Q})^2, \quad \rho_1^{1^2} = r_1^2 + (\mathfrak{P} - r_1\mathfrak{Q})^2.$$

Es ist:

$$\rho^{1^2} - \rho_1^{1^2} = \frac{r^2 - r_1^2}{(r - r_1)^2}E^2 - 2\mathfrak{P}E\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}$$

$$= \frac{r + r_1}{r - r_1}E^2 - 2\mathfrak{P}E\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2},$$

$$\rho_1^{1^2} - \rho_1^2 = \frac{r_1^2 - r^2}{(r - r_1)^2}E^2 + 2\mathfrak{P}E\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}$$

$$= -\frac{r + r_1}{r - r_1}E^2 + 2\mathfrak{P}E\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2};$$

also:

$$\rho^{1^2} - \rho_1^{1^2} + E^2 = 2E\left\{\frac{r}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}.$$

$$\rho_1^{1^2} - \rho^{1^2} + E^2 = -2E\left\{\frac{r_1}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\};$$

daher wird die Gleichung 52):

$$\left.\begin{array}{r} \rho_1^1\left\{\frac{r}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}} \\ -\rho^1\left\{\frac{r_1}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2}\right\}\frac{d\rho_1^1}{d\mathfrak{T}} \\ -\rho^1\rho_1^1\frac{dE}{d\mathfrak{T}} \end{array}\right\} = 0.$$

Es ist aber nach 55):

$$\rho^1\frac{d\rho^1}{d\mathfrak{T}} = (\mathfrak{P} - r\mathfrak{Q})\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} - r\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right),$$

$$\rho_1^1\frac{d\rho_1^1}{d\mathfrak{T}} = (\mathfrak{P} - r_1\mathfrak{Q})\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} - r_1\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right)$$

und nach 54):

$$E^2 = (r - r_1)^2(1 + \mathfrak{Q}^2), \quad \sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} = \frac{\mathfrak{Q}}{\sqrt{1 + \mathfrak{Q}^2}};$$

also:

$$\frac{r}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} = \frac{r_1(1 + \mathfrak{Q}^2) - \mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\sqrt{1 + \mathfrak{Q}^2}},$$

$$\frac{r_1}{r - r_1}E - \mathfrak{P}\sqrt{1 - \left(\frac{r - r_1}{E}\right)^2} = \frac{r_1(1 + \mathfrak{Q}^2) - \mathfrak{P}\mathfrak{Q}}{\sqrt{1 + \mathfrak{Q}^2}};$$

auch ist, wie man leicht findet:

$$\frac{dE}{d\mathfrak{T}} = \frac{(r-r_1)\mathfrak{Q}}{\sqrt{1+\mathfrak{Q}^2}} \cdot \frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}.$$

Folglich wird unsere obige Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r} \rho_1^{1^2}(\mathfrak{P}-r\mathfrak{Q})\{r(1+\mathfrak{Q}^2)-\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\}\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}-r\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right) \\ -\rho^{1^2}(\mathfrak{P}-r_1\mathfrak{Q})\{r_1(1+\mathfrak{Q}^2)-\mathfrak{P}\mathfrak{Q}\}\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}-r_1\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right) \\ -(r-r_1)\rho^{1^2}\rho_1^{1^2}\mathfrak{Q}\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}} \end{array}\right\} = 0$$

oder

$$\left.\begin{array}{r} \rho_1^{1^2}(\mathfrak{P}-r\mathfrak{Q})\{r-(\mathfrak{P}-r\mathfrak{Q})\mathfrak{Q}\}\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}-r\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right) \\ -\rho^{1^2}(\mathfrak{P}-r_1\mathfrak{Q})\{r_1-(\mathfrak{P}-r_1\mathfrak{Q})\mathfrak{Q}\}\left(\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}-r_1\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}}\right) \\ -(r-r_1)\rho^{1^2}\rho_1^{1^2}\mathfrak{Q}\frac{d\mathfrak{Q}}{d\mathfrak{T}} \end{array}\right\} = 0.$$

Setzen wir nun

56) $$\mathfrak{U} = \mathfrak{P} - r\mathfrak{Q}, \quad \mathfrak{U}_1 = \mathfrak{P} - r_1\mathfrak{Q};$$

so ist

$$(r-r_1)\mathfrak{P} = r\mathfrak{U}_1 - r_1\mathfrak{U}, \quad (r-r_1)\mathfrak{Q} = \mathfrak{U}_1 - \mathfrak{U}$$

und nach 55)

$$\rho^{1^2} = r^2 + \mathfrak{U}^2, \quad \rho_1^{1^2} = r_1^2 + \mathfrak{U}_1^2.$$

Also ist die obige Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r} \mathfrak{U}(r_1^2+\mathfrak{U}_1^2)\{r(r-r_1)+\mathfrak{U}(\mathfrak{U}-\mathfrak{U}_1)\}\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}} \\ -\mathfrak{U}_1(r^2+\mathfrak{U}^2)\{r_1(r-r_1)+\mathfrak{U}_1(\mathfrak{U}-\mathfrak{U}_1)\}\frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}} \\ -(\mathfrak{U}-\mathfrak{U}_1)(r^2+\mathfrak{U}^2)(r_1^2+\mathfrak{U}_1^2)\left(\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}}-\frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}}\right) \end{array}\right\} = 0.$$

folglich nach einigen leichten Reductionen:

$$(r\mathfrak{U}_1 - r_1\mathfrak{U})\left\{r(r_1^2+\mathfrak{U}_1^2)\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}} - r_1(r^2+\mathfrak{U}^2)\frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}}\right\} = 0.$$

Wollte man nun

57) $$r\mathfrak{U}_1 - r_1\mathfrak{U} = 0$$

setzen, so würde dies nach dem Obigen (56) $\mathfrak{P} = 0$, also $x = \mathfrak{x}$, $y = \mathfrak{y}$, $z = \mathfrak{z}$ geben, und es würde folglich

$$\frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}{a^2} + \frac{\mathfrak{z}^2}{b^2} = 1$$

sein, d. h. die Spitze der die beiden Weltkörper einhüllenden äusseren oder inneren Kegelfläche würde in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente in der Erdoberfläche liegen, was man daher in jedem Falle besonders prüfen muss. Im Allgemeinen ist aber die gesuchte Bedingungsgleichung:

58) $$r(r_1^2+\mathfrak{U}_1^2)\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}} - r_1(r^2+\mathfrak{U}^2)\frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}} = 0.$$

Zur Auflösung unserer Aufgabe bedient man sich nun dieser Gleichung auf folgende Weise. Man lässt ω sich von 0 bis 360° stetig verändern, und bestimmt für jedes ω sowohl in Bezug auf die Zeit $\mathfrak{T}$, als auch in Bezug auf eine davon um ein Geringes verschiedene Zeit, die Werthe von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ mittelst der Formeln 50) und 54), und dann die Werthe von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}_1$ mittelst der Formeln 56). Dann wird man leicht die den in Rede stehenden Werthen von ω entsprechenden Werthe von

$$\frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}} \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}}$$

wenigstens näherungsweise berechnen können. Führt man nun die der Zeit $\mathfrak{T}$ entsprechenden Werthe von

$$\mathfrak{U},\quad \mathfrak{U}_1 \quad \text{und} \quad \frac{d\mathfrak{U}}{d\mathfrak{T}},\ \frac{d\mathfrak{U}_1}{d\mathfrak{T}}$$

zugleich mit den Werthen von r, r_1 in die Gleichung 58) ein, so wird sich zeigen, ob dieselbe erfüllt ist oder nicht. Diejenigen Werthe von ω, für welche sich diese Gleichung erfüllt erweiset, sind die gesuchten, und die Coordinaten x, y, z werden dann mittelst der aus dem Obigen bekannten Formeln:

$$x = \mathfrak{x} + \mathfrak{P}\cos\varphi, \quad y = \mathfrak{y} + \mathfrak{P}\cos\psi, \quad z = \mathfrak{z} + \mathfrak{P}\cos\chi$$

erhalten; aus diesen Coordinaten ergeben sich aber ferner L und Φ auf bekannte Weise.

§. 7.

Wir wollen jetzt die Orte auf der Erdoberfläche bestimmen, wo in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, die Bedeckung central ist. Zu dem Ende bezeichnen wir die diesem Zeitmomente entsprechenden Rectascensionen und Declinationen der beiden Weltkörper durch α, δ und α_1. δ_1, und ihre Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde durch ρ und ρ_1. Dann sind

$$\begin{array}{ll} \rho\cos\alpha\cos\delta, \quad \text{und} & \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 \\ \rho\sin\alpha\cos\delta, & \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 \\ \rho\sin\delta & \rho_1\sin\delta_1 \end{array}$$

die Coordinaten der beiden Weltkörper in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente. Sind nun

$$x = \mathfrak{A}z + \mathfrak{B}, \quad y = \mathfrak{A}_1 z + \mathfrak{B}_1$$

die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehenden geraden Linie in demselben absoluten Zeitmomente, so ist

$$\rho\cos\alpha\cos\delta = \mathfrak{A}\rho\sin\delta + \mathfrak{B}, \quad \rho\sin\alpha\cos\delta = \mathfrak{A}_1\rho\sin\delta + \mathfrak{B}_1$$

und

$$\rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}\rho_1\sin\delta_1 + \mathfrak{B}, \quad \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}_1\rho_1\sin\delta_1 + \mathfrak{B}_1:$$

also

$$x - \rho\cos\alpha\cos\delta = \mathfrak{A}(z - \rho\sin\delta), \quad y - \rho\sin\alpha\cos\delta = \mathfrak{A}_1(z - \rho\sin\delta)$$

und

$$x - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}(z - \rho_1\sin\delta_1), \quad y - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}_1(z - \rho_1\sin\delta_1):$$

so wie

$$\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}\,(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1).$$

$$\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 = \mathfrak{A}_1(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1).$$

Folglich sind

$$59)\quad \begin{cases} x - \rho\cos\alpha\cos\delta = \dfrac{\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,(z - \rho\sin\delta)\,, \\ y - \rho\sin\alpha\cos\delta = \dfrac{\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,(z - \rho\sin\delta)\,; \end{cases}$$

oder

$$60)\quad \begin{cases} x - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 = \dfrac{\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,(z - \rho_1\sin\delta_1)\,, \\ y - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 = \dfrac{\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,(z - \rho_1\sin\delta_1)\,; \end{cases}$$

oder, wie man leicht findet:

$$61)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,z - \dfrac{\rho\rho_1(\cos\alpha\cos\delta\sin\delta_1 - \cos\alpha_1\sin\delta\cos\delta_1)}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,, \\ y = \dfrac{\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}\,z - \dfrac{\rho\rho_1(\sin\alpha\cos\delta\sin\delta_1 - \sin\alpha_1\sin\delta\cos\delta_1)}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1} \end{cases}$$

die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehenden geraden Linie.

Aus den Gleichungen 61) folgt:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 \\ = & \frac{\rho^2\cos\delta^2 + \rho_1^2\cos\delta_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\cos\delta_1}{(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2}\,z^2 \\ & - \frac{2\rho\rho_1\{\rho\cos\delta[\cos\delta\sin\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta_1] + \rho_1\cos\delta_1[\sin\delta\cos\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\sin\delta_1]\}}{(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2}\,z \\ & + \frac{\rho^2\rho_1^2\{\cos\delta^2\sin\delta_1^2 + \sin\delta^2\cos\delta_1^2 - 2\cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta\sin\delta_1\cos\delta_1\}}{(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2}. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunktes der durch die Gleichungen 61) charakterisirten geraden Linie mit der Erdoberfläche durch x, y, z, so ist

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

was, in Verbindung mit dem Vorhergehenden, die folgende Gleichung zur Bestimmung von z giebt:

$$\begin{aligned} 1 = & \left\{\frac{\rho^2\cos\delta^2 + \rho_1^2\cos\delta_1^2 - 2\rho\rho_1\cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\cos\delta_1}{a^2(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2} + \frac{1}{b^2}\right\} z^2 \\ & - \frac{2\rho\rho_1\{\rho\cos\delta[\cos\delta\sin\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta_1] + \rho_1\cos\delta_1[\sin\delta\cos\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\sin\delta_1]\}}{a^2(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2}\,z \\ & + \frac{\rho^2\rho_1^2\{\cos\delta^2\sin\delta_1^2 + \sin\delta^2\cos\delta_1^2 - 2\cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta\sin\delta_1\cos\delta_1\}}{a^2(\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1)^2}. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen

$$62)\quad \cos\Theta = \sin\delta\sin\delta_1 + \cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\cos\delta_1$$

und

$$63)\quad \begin{cases} \cos\varpi = \cos\delta\sin\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\sin\delta\cos\delta_1, \\ \cos\varpi_1 = \sin\delta\cos\delta_1 - \cos(\alpha-\alpha_1)\cos\delta\sin\delta_1; \end{cases}$$

auch wie gewöhnlich $a^2 - b^2 = \varepsilon^2 b^2$, so bringt man die obige Gleichung zur Bestimmung von z leicht auf die folgende Form:

$$a^2 (\rho \sin\delta - \rho_1 \sin\delta_1)^2 = \{ \rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\Theta + \varepsilon^2 (\rho\sin\delta - \rho_1 \sin\delta_1)^2 \} z^2$$
$$- 2\rho\rho_1 (\rho \cos\delta \cos\bar{\omega} + \rho_1 \cos\delta_1 \cos\bar{\omega}_1) z$$
$$+ \rho^2 \rho_1^2 (\cos\delta \sin\delta_1 \cos\bar{\omega} + \sin\delta \cos\delta_1 \cos\bar{\omega}_1).$$

Setzen wir:

64) $$\mathrm{R} = \rho \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\delta^2}, \quad \mathrm{R}_1 = \rho_1 \sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\delta_1^2};$$

65) $$\cos\theta = \frac{\cos\Theta + \varepsilon^2 \sin\delta \sin\delta_1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 \sin\delta^2)(1 + \varepsilon^2 \sin\delta_1^2)}};$$

66) $$\sin \mathrm{D} = \frac{\sin\delta}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\delta^2}}, \quad \sin \mathrm{D}_1 = \frac{\sin\delta_1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \sin\delta_1^2}};$$

67) $$\cos \mathrm{P} = \frac{\cos\delta \cos\bar{\omega}}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 \sin\delta^2)(1 + \varepsilon^2 \sin\delta_1^2)}}, \quad \cos \mathrm{P}_1 = \frac{\cos\delta_1 \cos\bar{\omega}_1}{\sqrt{(1 + \varepsilon^2 \sin\delta^2)(1 + \varepsilon^2 \sin\delta_1^2)}};$$

so ist, wie man leicht findet:

$$\rho \sin\delta - \rho_1 \sin\delta_1 = \mathrm{R} \sin \mathrm{D} - \mathrm{R}_1 \sin \mathrm{D}_1,$$

$$\rho^2 + \rho_1^2 - 2\rho\rho_1 \cos\Theta + \varepsilon^2 (\rho \sin\delta - \rho_1 \sin\delta_1)^2 = \mathrm{R}^2 + \mathrm{R}_1^2 - 2\mathrm{R}\mathrm{R}_1 \cos\theta,$$

$$\rho\rho_1 (\rho \cos\delta \cos\bar{\omega} + \rho_1 \cos\delta_1 \cos\bar{\omega}_1) = \mathrm{R}\mathrm{R}_1 (\rho \cos \mathrm{P} + \rho_1 \cos \mathrm{P}_1),$$

$$\rho^2\rho_1^2 (\cos\delta \sin\delta_1 \cos\bar{\omega} + \sin\delta \cos\delta_1 \cos\bar{\omega}_1) = \mathrm{R}\mathrm{R}_1 (\rho \mathrm{R}_1 \cos \mathrm{P} \sin \mathrm{D}_1 + \rho_1 \mathrm{R} \cos \mathrm{P}_1 \sin \mathrm{D});$$

folglich die Gleichung zur Bestimmung von z:

$$a^2 (\mathrm{R} \sin \mathrm{D} - \mathrm{R}_1 \sin \mathrm{D}_1)^2$$
$$= (\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}_1^2 - 2\mathrm{R}\mathrm{R}_1 \cos\theta) z^2 - 2\mathrm{R}\mathrm{R}_1 (\rho \cos \mathrm{P} + \rho_1 \cos \mathrm{P}_1) z$$
$$+ \mathrm{R}\mathrm{R}_1 (\rho \mathrm{R}_1 \cos \mathrm{P} \sin \mathrm{D}_1 + \rho_1 \mathrm{R} \cos \mathrm{P}_1 \sin \mathrm{D}),$$

oder auch:

$$a^2 \left(\frac{\sin \mathrm{D}}{\mathrm{R}_1} - \frac{\sin \mathrm{D}_1}{\mathrm{R}} \right)^2$$
$$= \left(\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}_1^2} - \frac{2\cos\theta}{\mathrm{R}\mathrm{R}_1} \right) z^2 - 2 \left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} \cdot \frac{\cos \mathrm{P}}{\mathrm{R}_1} + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1} \cdot \frac{\cos \mathrm{P}_1}{\mathrm{R}} \right) z$$
$$+ \left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} \cos \mathrm{P} \sin \mathrm{D}_1 + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1} \cos \mathrm{P}_1 \sin \mathrm{D} \right);$$

oder, wenn wir

68) $$\sin \Pi = \frac{a}{\mathrm{R}}, \quad \sin \Pi_1 = \frac{a}{\mathrm{R}_1}$$

setzen:

69) $$(\sin \Pi_1 \sin \mathrm{D} - \sin \Pi \sin \mathrm{D}_1)^2$$
$$= (\sin \Pi^2 + \sin \Pi_1^2 - 2 \sin \Pi \sin \Pi_1 \cos\theta) \left(\frac{z}{a}\right)^2 - 2 \left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} \sin \Pi_1 \cos \mathrm{P} + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1} \sin \Pi \cos \mathrm{P}_1 \right) \frac{z}{a}$$
$$+ \left(\frac{\rho}{\mathrm{R}} \cos \mathrm{P} \sin \mathrm{D}_1 + \frac{\rho_1}{\mathrm{R}_1} \cos \mathrm{P}_1 \sin \mathrm{D} \right).$$

Löst man diese Gleichung auf gewöhnliche Weise auf, so erhält man:

70) $$(\sin\Pi^2 + \sin\Pi_1^2 - 2\sin\Pi\sin\Pi_1\cos\Theta)\frac{z}{a}$$

$$= \frac{\rho}{R}\sin\Pi_1\cos P + \frac{\rho_1}{R_1}\sin\Pi\cos P_1$$

$$\pm\left\{\begin{array}{l}\left(\frac{\rho}{R}\sin\Pi_1\cos P + \frac{\rho_1}{R_1}\sin\Pi\cos P_1\right)^2 \\ + (\sin\Pi^2 + \sin\Pi_1^2 - 2\sin\Pi\sin\Pi_1\cos\Theta) \\ \left\{(\sin\Pi_1\sin D - \sin\Pi\sin D_1)^2 - \left(\frac{\rho}{R}\cos P\sin D_1 + \frac{\rho_1}{R_1}\cos P_1\sin D\right)\right\}\end{array}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hat man z mittelst dieser Formel gefunden, so erhält man x und y mittelst der folgenden, aus dem Obigen sich unmittelbar ergebenden Formeln:

71) $$\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\alpha\cos\delta + \frac{\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}(z - \rho\sin\delta), \\ y = \rho\sin\alpha\cos\delta + \frac{\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}(z - \rho\sin\delta); \end{array}\right.$$

oder:

72) $$\left\{\begin{array}{l} x = \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1 + \frac{\rho\cos\alpha\cos\delta - \rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}(z - \rho_1\sin\delta_1), \\ y = \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1 + \frac{\rho\sin\alpha\cos\delta - \rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\rho\sin\delta - \rho_1\sin\delta_1}(z - \rho_1\sin\delta_1). \end{array}\right.$$

Bezeichnen wir die beiden Systeme von Werthen, welche die durch die vorhergehenden Formeln bestimmten Coordinaten haben können, durch x, y, z und $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, so ist noch zu entscheiden, welcher von den beiden Punkten (xyz) und $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ die centrale Bedeckung wirklich sieht. Zu dem Ende ermittle man, was immer sehr leicht ist, ob der Punkt (xyz) zwischen dem Punkte $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ und dem durch die Coordinaten $\rho\cos\alpha\cos\delta$, $\rho\sin\alpha\cos\delta$, $\rho\sin\delta$ oder dem durch die Coordinaten $\rho_1\cos\alpha_1\cos\delta_1$, $\rho_1\sin\alpha_1\cos\delta_1$, $\rho_1\sin\delta_1$ bestimmten Punkte liegt oder nicht. Ist das Erste der Fall, so sieht (xyz) die centrale Bedeckung; ist das Zweite der Fall, so wird dieselbe von $(\bar{x}\bar{y}\bar{z})$ gesehen.

Die Bedingungsgleichung, dass die durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehende gerade Linie die Erdoberfläche berührt, also der Berührungspunkt die centrale Bedeckung in seinem Horizonte sieht, wodurch sich zugleich der Anfang und das Ende der centralen Bedeckung auf der Erde bestimmt, ist nach dem Obigen:

73) $$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\rho}{R}\sin\Pi_1\cos P + \frac{\rho_1}{R_1}\sin\Pi\cos P_1\right)^2 \\ + (\sin\Pi^2 + \sin\Pi_1^2 - 2\sin\Pi\sin\Pi_1\cos\Theta) \\ \left\{(\sin\Pi_1\sin D - \sin\Pi\sin D_1)^2 - \left(\frac{\rho}{R}\cos P\sin D_1 + \frac{\rho_1}{R_1}\cos P_1\sin D\right)\right\}\end{array}\right\} = 0$$

oder:

74) $$\frac{\rho}{R}\cos P\sin D_1 + \frac{\rho_1}{R_1}\cos P_1\sin D$$

$$= (\sin\Pi_1\sin D - \sin\Pi\sin D_1)^2 + \frac{\left(\frac{\rho}{R}\sin\Pi_1\cos P + \frac{\rho_1}{R_1}\sin\Pi\cos P_1\right)^2}{\sin\Pi^2 + \sin\Pi_1^2 - 2\sin\Pi\sin\Pi_1\cos\Theta}.$$

§. 8.

Wir wollen jetzt noch die Orte auf der Erdoberfläche zu bestimmen suchen, wo in dem absoluten Zeitmomente, welches wir hier immer in's Auge fassen, die scheinbare Entfernung der beiden Weltkörper von einander die gegebene Grösse Δ^1 hat. Diese Aufgabe kann, wie es mir scheint, am einfachsten und elegantesten auf folgende Art gelöst werden.

Die Gleichungen der durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehenden geraden Linie sind bekanntlich

$$\frac{x-f}{f-f_1}=\frac{y-g}{g-g_1}=\frac{z-h}{h-h_1}$$

oder

$$\frac{x-f_1}{f-f_1}=\frac{y-g_1}{g-g_1}=\frac{z-h_1}{h-h_1},$$

und die Coordinaten des Mittelpunktes der Entfernung E der beiden Weltkörper von einander sind:

$$\tfrac{1}{2}(f+f_1),\quad \tfrac{1}{2}(g+g_1),\quad \tfrac{1}{2}(h+h_1).$$

Die allgemeine Form der Gleichung einer durch diesen Punkt gehenden Ebene ist

$$L\{x-\tfrac{1}{2}(f+f_1)\}+M\{y-\tfrac{1}{2}(g+g_1)\}+N\{z-\tfrac{1}{2}(h+h_1)\}=0.$$

Soll diese Ebene aber auf der durch die Mittelpunkte der beiden Weltkörper gehenden geraden Linie senkrecht stehen, so muss nach den Lehren der analytischen Geometrie bekanntlich

$$\frac{L}{f-f_1}=\frac{M}{g-g_1}=\frac{N}{h-h_1}$$

sein, und die Gleichung unserer Ebene ist also:

$$(f-f_1)\{x-\tfrac{1}{2}(f+f_1)\}+(g-g_1)\{y-\tfrac{1}{2}(g+g_1)\}+(h-h_1)\{z-\tfrac{1}{2}(h+h_1)\}=0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$2K=(f-f_1)(f+f_1)+(g-g_1)(g+g_1)+(h-h_1)(h+h_1)$$

setzen:

$$(f-f_1)x+(g-g_1)y+(h-h_1)z=K.$$

Die Gleichung einer beliebigen durch die beiden Punkte (fgh) und $(f_1g_1h_1)$ gelegten Ebene sei wie gewöhnlich

$$Ax+By+Cz+D=0$$

oder

$$A(x-f)+B(y-g)+C(z-h)=0,$$

$$A(x-f_1)+B(y-g_1)+C(z-h_1)=0;$$

wo

$$A(f-f_1)+B(g-g_1)+C(h-h_1)=0$$

ist.

Die Coordinaten eines Punktes in der gemeinschaftlichen Durchschnittslinie der beiden vorhergehenden Ebenen, welcher von dem Mittelpunkte der die Mittelpunkte der beiden Weltkörper mit einander verbindenden geraden Linie eine gewisse gegebene Entfernung P hat, sein $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$; so hat man zur Bestimmung dieser Coordinaten nach dem Vorhergehenden die drei folgenden Gleichungen:

$$(f-f_1)\mathfrak{x}_0+(g-g_1)\mathfrak{y}_0+(h-h_1)\mathfrak{z}_0=K,$$

$$A(\mathfrak{x}_0-f)+B(\mathfrak{y}_0-g)+C(\mathfrak{z}_0-h)=0,$$

$$\{\mathfrak{x}_0-\tfrac{1}{2}(f+f_1)\}^2+\{\mathfrak{y}_0-\tfrac{1}{2}(g+g_1)\}^2+\{\mathfrak{z}_0-\tfrac{1}{2}(h+h_1)\}^2=P^2:$$

welche man auch auf folgende Art ausdrücken kann:

$$(f-f_1)\{\mathfrak{x}_0-\tfrac{1}{2}(f+f_1)\}+(g-g_1)\{\mathfrak{y}_0-\tfrac{1}{2}(g+g_1)\}+(h-h_1)\{\mathfrak{z}_0-\tfrac{1}{2}(h+h_1)\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l} A\{\mathfrak{x}_0-\tfrac{1}{2}(f+f_1)-\tfrac{1}{2}(f-f_1)\} \\ +B\{\mathfrak{y}_0-\tfrac{1}{2}(g+g_1)-\tfrac{1}{2}(g-g_1)\} \\ +C\{\mathfrak{z}_0-\tfrac{1}{2}(h+h_1)-\tfrac{1}{2}(h-h_1)\} \end{array}\right\}=0,$$

$$\{\mathfrak{x}_0-\tfrac{1}{2}(f+f_1)\}^2+\{\mathfrak{y}_0-\tfrac{1}{2}(g+g_1)\}^2+\{\mathfrak{z}_0-\tfrac{1}{2}(h+h_1)\}^2=P^2;$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\mathfrak{X}_0=\mathfrak{x}_0-\tfrac{1}{2}(f+f_1),$$

$$\mathfrak{Y}_0=\mathfrak{y}_0-\tfrac{1}{2}(g+g_1),$$

$$\mathfrak{Z}_0=\mathfrak{z}_0-\tfrac{1}{2}(h+h_1)$$

setzen, auf folgende Art:

$$(f-f_1)\mathfrak{X}_0+(g-g_1)\mathfrak{Y}_0+(h-h_1)\mathfrak{Z}_0=0,$$

$$A\{\mathfrak{X}_0-\tfrac{1}{2}(f-f_1)\}+B\{\mathfrak{Y}_0-\tfrac{1}{2}(g-g_1)\}+C\{\mathfrak{Z}_0-\tfrac{1}{2}(h-h_1)\}=0,$$

$$\mathfrak{X}_0^2+\mathfrak{Y}_0^2+\mathfrak{Z}_0^2=P^2;$$

oder endlich, weil

$$A(f-f_1)+B(g-g_1)+C(h-h_1)=0.$$

ist, auf folgende Art:

$$(f-f_1)\mathfrak{X}_0+(g-g_1)\mathfrak{Y}_0+(h-h_1)\mathfrak{Z}_0=0,$$

$$A\mathfrak{X}_0+B\mathfrak{Y}_0+C\mathfrak{Z}_0=0,$$

$$\mathfrak{X}_0^2+\mathfrak{Y}_0^2+\mathfrak{Z}_0^2=P^2.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\{C(f-f_1)-A(h-h_1)\}\mathfrak{X}_0-\{B(h-h_1)-C(g-g_1)\}\mathfrak{Y}_0=0,$$

$$\{A(g-g_1)-B(f-f_1)\}\mathfrak{X}_0-\{B(h-h_1)-C(g-g_1)\}\mathfrak{Z}_0=0;$$

oder in bekannter Bezeichnung:

$$[CA]\mathfrak{X}_0-[BC]\mathfrak{Y}_0=0,\quad [AB]\mathfrak{X}_0-[BC]\mathfrak{Z}_0=0;$$

also

$$\mathfrak{Y}_0=\frac{[CA]}{[BC]}\mathfrak{X}_0,\quad \mathfrak{Z}_0=\frac{[AB]}{[BC]}\mathfrak{X}_0:$$

folglich wegen der dritten der drei obigen Gleichungen:

$$\{[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2\}\mathfrak{X}_0^2=P^2[BC]^2.$$

und daher mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\mathfrak{X}_0 = \pm \frac{P[BC]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{Y}_0 = \pm \frac{P[CA]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{Z}_0 = \pm \frac{P[AB]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}};$$

also

$$\mathfrak{x}_0 = \tfrac{1}{2}(f + f_1) \pm \frac{P[BC]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}}.$$

$$\mathfrak{y}_0 = \tfrac{1}{2}(g + g_1) \pm \frac{P[CA]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{z}_0 = \tfrac{1}{2}(h + h_1) \pm \frac{P[AB]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}}.$$

Insofern man aber den Winkel ω von 0 bis 360° wachsen lässt, reicht es offenbar hin, in diesen Formeln entweder blos die oberen, oder blos die unteren Zeichen zu nehmen, wesshalb wir im Folgenden stets

$$\mathfrak{x}_0 = \tfrac{1}{2}(f + f_1) + \frac{P[BC]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{y}_0 = \tfrac{1}{2}(g + g_1) + \frac{P[CA]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{z}_0 = \tfrac{1}{2}(h + h_1) + \frac{P[AB]}{\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}}$$

setzen wollen.

Denken wir uns jetzt über der Entfernung E der beiden Weltkörper von einander als Sehne in der durch die Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirten Ebene einen den gegebenen Winkel Δ' fassenden Kreisabschnitt beschrieben, und lassen die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ jetzt dem Mittelpunkte des Kreises, welchem dieser Kreisabschnitt angehört, entsprechen, so ergiebt sich durch eine sehr einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle die Gleichung

$$\tfrac{1}{2}E = P \tang \Delta^1, \quad \text{also} \quad P = \tfrac{1}{2}E \cot \Delta^1;$$

und für die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ ergeben sich also nach dem Obigen die folgenden Formeln:

$$\mathfrak{x}_0 = \tfrac{1}{2}(f + f_1) + \frac{E[BC] \cot \Delta^1}{2\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}},$$

$$\mathfrak{y}_0 = \tfrac{1}{2}(g + g_1) + \frac{E[CA] \cot \Delta^1}{2\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}}.$$

$$\mathfrak{z}_0 = \tfrac{1}{2}(h + h_1) + \frac{E[AB] \cot \Delta^1}{2\sqrt{[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2}};$$

oder nach einer bekannten Relation:

$$\mathfrak{x}_0 = \tfrac{1}{2}(f + f_1) + \frac{[BC] \cot \Delta'}{2E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}},$$

$$\mathfrak{y}_0 = \tfrac{1}{2}(g + g_1) + \frac{[CA] \cot \Delta'}{2E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}},$$

$$\mathfrak{z}_0 = \tfrac{1}{2}(h + h_1) + \frac{[AB] \cot \Delta'}{2E\sqrt{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2}}.$$

Der Halbmesser des in Rede stehenden Kreises ist

$$\frac{E}{2 \sin \Delta^1} = \tfrac{1}{2} E \operatorname{cosec} \Delta',$$

und die Orte (xyz) auf der Erde, welche in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente die Entfernung E der beiden Weltkörper von einander unter dem Winkel Δ' sehen, sind offenbar diejenigen Punkte in der durch die Gleichung

$$A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0$$

oder

$$A(x - f_1) + B(y - g_1) + C(z - h_1) = 0$$

charakterisirten Ebene und in der Erdoberfläche, welche von dem Punkte $(\mathfrak{x}_0\ \mathfrak{y}_0\ \mathfrak{z}_0)$ die Entfernung $\frac{1}{2} E \operatorname{cosec} \Delta'$ haben, was zur Bestimmung von x, y, z die Gleichungen

$$A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$(x - \mathfrak{x}_0)^2 + (y - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4} E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2$$

oder

$$A(x - f_1) + B(y - g_1) + C(z - h_1) = 0,$$

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

$$(x - \mathfrak{x}_0)^2 + (y - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4} E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2$$

giebt. Das erste dieser beiden Systeme von Gleichungen, welches wir hier benützen wollen, kann auch auf den folgenden Ausdruck gebracht werden:

$$A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0,$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{a^2} - \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) z^2 = 1,$$

$$(x - \mathfrak{x}_0)^2 + (y - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4} E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2:$$

oder auf den Ausdruck:

$$A(x - f) + B(y - g) + C(z - h) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + (1 + \varepsilon^2) z^2 = a^2,$$

$$(x - \mathfrak{x}_0)^2 + (y - \mathfrak{y}_0)^2 + (z - \mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4} E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2.$$

Die Entwickelung der Grössen x, y, z aus diesen Gleichungen bietet wesentliche Schwierigkeiten nicht dar. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir dieselben hier nur für den Fall der Kugel, wo $\varepsilon = 0$ ist, und die Gleichungen daher die Gestalt

$$A(x-f) + B(y-g) + C(z-h) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$(x-\mathfrak{x}_0)^2 + (y-\mathfrak{y}_0)^2 + (z-\mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}$$

annehmen, auflösen. Hat man x, y, z aus diesen drei letzteren Gleichungen bestimmt, so werden sich, weil ε eine sehr kleine Grösse ist, nach den bekannten Näherungsmethoden immer auch leicht die kleinen Verbesserungen berechnen lassen, welche an die gefundenen Werthe von x, y, z noch angebracht werden müssen, wenn den Gleichungen

$$A(x-f) + B(y-g) + C(z-h) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \varepsilon^2 z^2 = a^2,$$

$$(x-\mathfrak{x}_0)^2 + (y-\mathfrak{y}_0)^2 + (z-\mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}$$

genügt werden soll.

Aus den drei aufzulösenden Gleichungen

$$A(x-f) + B(y-g) + C(z-h) = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

$$(x-\mathfrak{x}_0)^2 + (y-\mathfrak{y}_0)^2 + (z-\mathfrak{z}_0)^2 = \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}$$

leitet man sehr leicht die beiden folgenden ab:

$$Ax + By + Cz = Af + Bg + Ch,$$

$$\mathfrak{x}_0 x + \mathfrak{y}_0 y + \mathfrak{z}_0 z = \tfrac{1}{2}(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2) - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2};$$

aus denen sich ferner ergiebt:

$$(A\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{x}_0)x - (C\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{z}_0)y$$

$$= (Af + Bg + Ch)\mathfrak{z}_0 - \tfrac{1}{2}C\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right),$$

$$(B\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{y}_0)x - (C\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{z}_0)z$$

$$= -(Af + Bg + Ch)\mathfrak{y}_0 + \tfrac{1}{2}B\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right);$$

also:

$$y = -\frac{(Af + Bg + Ch)\mathfrak{z}_0 - \frac{1}{2}C\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \frac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right) - (A\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{x}_0)x}{C\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{z}_0},$$

$$z = \frac{(Af + Bg + Ch)\mathfrak{y}_0 - \frac{1}{2}B\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \frac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right) + (B\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{y}_0)x}{C\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{z}_0};$$

und folglich:

$$(B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)x = (B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)x,$$

$$(B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)y = (Af + Bg + Ch)\mathfrak{z}_0 - \tfrac{1}{2}C\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right) + (C\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{z}_0)x,$$

$$(B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)z = -(Af + Bg + Ch)\mathfrak{y}_0 + \tfrac{1}{2}B\left(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta^{1^2}\right) + (A\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{x}_0)x.$$

Erhebt man nun diese drei Gleichungen auf das Quadrat und addirt sie dann zu einander, so erhält man, mit Rücksicht auf die zweite der drei aufzulösenden Gleichungen, zur Bestimmung von x die folgende Gleichung des zweiten Grades:

$$\{(A\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{x}_0)^2 + (B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)^2 + (C\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{z}_0)^2\}\,x^2$$

$$-2\left\{\begin{array}{l}(A\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{x}_0)\{(Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{y}_0 - \tfrac{1}{2}B(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2)\} \\ -(C\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{z}_0)\{(Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{z}_0 - \tfrac{1}{2}C(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2)\}\end{array}\right\}x$$

$$= a^2(B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0)^2 - \{(Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{y}_0 - \tfrac{1}{2}B(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2)\}^2$$

$$-\{(Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{z}_0 - \tfrac{1}{2}C(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2)\}^2.$$

Setzen wir daher der Kürze wegen

$$[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0] = A\mathfrak{y}_0 - B\mathfrak{x}_0,$$
$$[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0] = B\mathfrak{z}_0 - C\mathfrak{y}_0,$$
$$[\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0] = C\mathfrak{x}_0 - A\mathfrak{z}_0$$

und

$$[A\mathfrak{x}_0] = (Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{x}_0 - \tfrac{1}{2}A(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2),$$

$$[B\mathfrak{y}_0] = (Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{y}_0 - \tfrac{1}{2}B(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2),$$

$$[C\mathfrak{z}_0] = (Af+Bg+Ch)\,\mathfrak{z}_0 - \tfrac{1}{2}C(a^2+\mathfrak{x}_0^2+\mathfrak{y}_0^2+\mathfrak{z}_0^2-\tfrac{1}{4}E^2\,cosec\,\Delta'^2);$$

so haben wir nach dem Obigen zur Bestimmung von x, y, z die drei folgenden Gleichungen:

$$\{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2\}\,x^2 - 2\{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]\,[B\mathfrak{y}_0] - [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]\,[C\mathfrak{z}_0]\}\,x$$
$$= a^2[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 - [B\mathfrak{y}_0]^2 - [C\mathfrak{z}_0]^2,$$

$$y = \frac{[C\mathfrak{z}_0] + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]\,x}{[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]}, \quad z = -\frac{[B\mathfrak{y}_0] - [\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]\,x}{[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]}.$$

Löst man aber diese Gleichungen vollständig auf, so erhält man nach einer zwar etwas weitläufigen, sonst aber keiner weitern Schwierigkeit unterliegenden Rechnung, wenn man der Kürze wegen

$$\Omega = a^2\{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2\} - \{[A\mathfrak{x}_0]^2 + [B\mathfrak{y}_0]^2 + [C\mathfrak{z}_0]^2\}$$

setzt, für x, y, z die folgenden merkwürdigen Ausdrücke, in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen:

$$x = \frac{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]\,[B\mathfrak{y}_0] - [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]\,[C\mathfrak{z}_0] \pm [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]\sqrt{\Omega}}{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2},$$

$$y = \frac{[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]\,[C\mathfrak{z}_0] - [\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]\,[A\mathfrak{x}_0] \pm [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]\sqrt{\Omega}}{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2},$$

$$z = \frac{[\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]\,[A\mathfrak{x}_0] - [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]\,[B\mathfrak{y}_0] \pm [\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]\sqrt{\Omega}}{[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2}.$$

Man könnte diese Formeln noch auf verschiedene andere Arten ausdrücken, weil zwischen den Grössen, von denen sie abhängen, verschiedene bemerkenswerthe Relationen stattfinden. Um jedoch nicht zu weitläufig zu werden, wollen wir hier nur auf ein Paar dieser Relationen aufmerksam machen, welche sich auf der Stelle darbieten.

Zuvörderst erhält man leicht

$$[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)(\mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2) - (A\mathfrak{x}_0 + B\mathfrak{y}_0 + C\mathfrak{z}_0)^2;$$

weil nun aber

$$Af + Bg + Ch = Af_1 + Bg_1 + Ch_1,$$

$$A[BC] + B[CA] + C[AB] = 0$$

ist, so liefern die obigen Ausdrücke von $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ leicht die Gleichung:

$$A\mathfrak{x}_0 + B\mathfrak{y}_0 + C\mathfrak{z}_0 = Af + Bg + Ch,$$

so dass also nach dem Obigen auch

$$[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0]^2 + [\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0]^2 + [\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0]^2$$

$$= (A^2 + B^2 + C^2)(\mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2) - (Af + Bg + Ch)^2$$

gesetzt werden kann.

Es ist

$$\mathfrak{x}_0[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0] + \mathfrak{y}_0[\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0] + \mathfrak{z}_0[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0] = 0, \quad A[\mathfrak{y}_0\mathfrak{z}_0] + B[\mathfrak{z}_0\mathfrak{x}_0] + C[\mathfrak{x}_0\mathfrak{y}_0] = 0$$

und

$$\mathfrak{x}_0[A\mathfrak{x}_0] + \mathfrak{y}_0[B\mathfrak{y}_0] + \mathfrak{z}_0[C\mathfrak{z}_0]$$

$$= \tfrac{1}{2}(Af + Bg + Ch)(\mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - a^2 + \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2),$$

$$A[A\mathfrak{x}_0] + B[B\mathfrak{y}_0] + C[C\mathfrak{z}_0]$$

$$= (Af + Bg + Ch)^2 - \tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 + C^2)(a^2 + \mathfrak{x}_0^2 + \mathfrak{y}_0^2 + \mathfrak{z}_0^2 - \tfrac{1}{4}E^2 \operatorname{cosec} \Delta'^2).$$

Weil man nach den aus dem Obigen bekannten Formeln für jeden Werth von ω zwischen 0 und 360° die entsprechenden Werthe von A, B, C und $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ bestimmen kann, so kann man mittelst der vorher entwickelten Ausdrücke von x, y, z für jeden zwischen 0 und 360° liegenden Werth von ω die entsprechenden Werthe dieser Coordinaten finden; wie man dann aber ferner aus denselben die entsprechenden Längen und Breiten findet, ist oben gleichfalls schon gezeigt worden.

Sechstes Capitel.

Theorie der Bedeckungen, wenn der eine der beiden Weltkörper ein Fixstern ist.

(Theorie der Sternbedeckungen.)

§. 1.

Alles kommt in diesem Capitel auf die Betrachtung der geraden Linie an, deren Lage im Allgemeinen zu bestimmen in Cap. III gelehrt worden ist. Um dies dem Leser deutlich vor die Augen zu führen, wollen wir uns die folgende Construction gemacht denken. Wir wollen durch den Mittelpunkt (fgh) des unserem

Sonnensysteme angehörenden, mit dem Halbmesser r beschriebenen kugelförmigen Weltkörpers uns eine zugleich durch einen gewissen Fixstern gehende Ebene gelegt denken, welche durch die Gleichung

$$1)\qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

charakterisirt sein mag, und wollen in dieser Ebene von dem Fixsterne aus zwei gerade Linien ziehen: die erste nach dem Mittelpunkte (fgh) des mit dem Halbmesser r beschriebenen kugelförmigen Weltkörpers, die zweite so, dass sie diesen Weltkörper in dem Punkte (XYZ) berührt; ziehen wir dann von dem Fixsterne aus noch eine dritte gerade Linie nach dem Mittelpunkte der Erde oder dem Anfange der Coordinaten, so wird man diese drei geraden Linien, weil dieselben sämmtlich von dem Fixsterne aus nach innerhalb des Bereiches unsers Sonnensystemes liegenden Punkten gezogen sind, wegen der in Bezug auf unser Sonnensystem als unendlich zu betrachtenden Entfernung der Fixsterne, ohne allen merklichen Fehler, wenigstens bei Untersuchungen von der Art der vorliegenden, als unter einander parallel anzusehen berechtigt sein, und es werden folglich, wenn wir die von dem Fixsterne nach dem Mittelpunkte (fgh) des mit dem Halbmesser r beschriebenen kugelförmigen Weltkörpers gezogene gerade Linie uns wie in Cap. III durch Gleichungen

$$2)\qquad \frac{x-f}{\cos\lambda} = \frac{y-g}{\cos\mu} = \frac{z-h}{\cos\nu}$$

charakterisirt denken, die drei Winkel λ, μ, ν unmittelbar durch die Rectascension und Declination des betreffenden Fixsterns gegeben sein, wenigstens mittelst bekannter einfacher Formeln immer leicht aus den letzteren abgeleitet werden können, so dass wir also im Folgenden die durch λ, μ, ν bezeichneten Winkel, ebenso wie die Coordinaten f, g, h des mit dem Halbmesser r beschriebenen kugelförmigen Weltkörpers, letztere natürlich in Bezug auf ein bestimmtes absolutes Zeitmoment, immer als bekannt betrachten können. Dass es aber in diesem Capitel zunächst hauptsächlich auf die Bestimmung der Durchschnittspunkte der von dem Fixsterne nach dem Punkte (XYZ) gezogenen geraden Linie, welches eben die in Cap. III der Lage nach zu bestimmen gelehrte Linie ist, mit der Oberfläche der Erde ankommen wird, bedarf nun einer weiteren Erläuterung nicht, und wir wollen daher jetzt sogleich zur Entwickelung der Coordinaten der Durchschnittspunkte übergehen.

§. 2.

Die Gleichungen der geraden Linie, auf deren Betrachtung in diesem Capitel Alles ankommt, sind nach Cap. III, Nr. 3) bekanntlich:

$$3)\qquad \frac{x-X}{\cos\lambda} = \frac{y-Y}{\cos\mu} = \frac{z-Z}{\cos\nu},$$

wo die Coordinaten XYZ nach Cap. III, Nr. 18) durch die Formeln

$$4)\qquad \begin{cases} X = f + \dfrac{r\,\{BC\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Y = g + \dfrac{r\,\{CA\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \\ Z = g + \dfrac{r\,\{AB\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}; \end{cases}$$

oder, vollständig entwickelt, durch die Formeln

$$5)\quad \begin{cases} X = f - r\dfrac{(g\cos\nu - h\cos\mu)\sin\omega - \{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\cos\omega}{\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}}, \\ Y = g - r\dfrac{(h\cos\lambda - f\cos\nu)\sin\omega - \{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\cos\omega}{\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}}, \\ Z = h - r\dfrac{(f\cos\mu - g\cos\lambda)\sin\omega - \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\cos\omega}{\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}} \end{cases}$$

bestimmt sind.

Bezeichnen wir jetzt die Coordinaten der Durchschnittspunkte der durch die Gleichungen 3) charakterisirten geraden Linie mit der Oberfläche der Erde durch x, y, z; so ist nach Cap. IV, Nr. 3):

$$\left(\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}\right)\frac{x-X}{\cos\lambda}$$

$$=\left(\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}\right)\frac{y-Y}{\cos\mu}$$

$$=\left(\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}\right)\frac{z-Z}{\cos\nu}$$

$$=-\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu}{a^2}-\frac{Z\cos\nu}{b^2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}-\left(\frac{X\cos\mu-Y\cos\lambda}{a^2}\right)^2-\frac{(Y\cos\nu-Z\cos\mu)^2+(Z\cos\lambda-X\cos\nu)^2}{a^2b^2}}.$$

Zuerst ist nun

$$\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}=\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2+\cos\nu^2}{a^2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cos\nu^2,$$

also

$$a^2\left(\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}\right)=1-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\cos\nu^2=1+\varepsilon^2\cos\nu^2.$$

Ferner ist

$$\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu}{a^2}+\frac{Z\cos\nu}{b^2}=\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu}{a^2}-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)Z\cos\nu,$$

also

$$a^2\left(\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu}{a^2}+\frac{Z\cos\nu}{b^2}\right)=X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu+\varepsilon^2 Z\cos\nu;$$

aber, weil nach einer bekannten Relation

$$\{AB\}\cos\nu+\{BC\}\cos\lambda+\{CA\}\cos\mu=0$$

ist,

$$X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu=f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu;$$

also

$$a^2\left(\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu}{a^2}+\frac{Z\cos\nu}{b^2}\right)=f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu+\varepsilon^2 Z\cos\nu.$$

Endlich ist

$$\left(\frac{X\cos\mu-Y\cos\lambda}{a^2}\right)^2+\frac{(Y\cos\nu-Z\cos\mu)^2+(Z\cos\lambda-X\cos\nu)^2}{a^2b^2}$$

$$=\frac{X^2+Y^2+Z^2-(X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu)^2}{a^2b^2}+\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(X\cos\mu-Y\cos\lambda)^2,$$

also

$$a^2\left\{\left(\frac{X\cos\mu - Y\cos\lambda}{a^2}\right)^2 + \frac{(Y\cos\nu - Z\cos\mu)^2 + (Z\cos\lambda - X\cos\nu)^2}{a^2b^2}\right\}$$

$$= \frac{X^2+Y^2+Z^2-(X\cos\lambda + Y\cos\mu + Z\cos\nu)^2}{b^2} - \varepsilon^2\left(\frac{X\cos\mu - Y\cos\lambda}{a}\right)^2.$$

Nun ist

$$X^2+Y^2+Z^2 = f^2+g^2+h^2+2r\frac{f\{BC\}+g\{CA\}+h\{AB\}}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$+ r^2\frac{\{AB\}^2+\{BC\}^2+\{CA\}^2}{A^2+B^2+C^2}$$

$$= r^2+f^2+g^2+h^2+2r\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}\cdot\cos\omega,$$

also

$$X^2+Y^2+Z^2-(X\cos\lambda+Y\cos\mu+Z\cos\nu)^2$$

$$= r^2+f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2$$

$$+2r\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}\cdot\cos\omega.$$

Ferner ist

$$X\cos\mu - Y\cos\lambda = f\cos\mu - g\cos\lambda + r\frac{\{BC\}\cos\mu - \{CA\}\cos\lambda}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$= f\cos\mu - g\cos\lambda$$

$$+ r\frac{(f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega + \{h-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega}{\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}}.$$

Also ist

$$a^2\left\{\left(\frac{X\cos\mu - Y\cos\lambda}{a^2}\right)^2 + \frac{(Y\cos\nu - Z\cos\mu)^2 + (Z\cos\lambda - X\cos\nu)^2}{a^2b^2}\right\}$$

$$= \frac{r^2+f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2+2r\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}.\cos\omega}{b^2}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{a^2}\left\{\begin{array}{l} f\cos\mu - g\cos\lambda \\ + r\dfrac{(f\cos\mu-g\cos\lambda)\cos\omega+\{h-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega}{\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}}\end{array}\right\}^2.$$

Setzen wir jetzt der Kürze wegen:

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} F = \sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}, \\ G = f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu, \\ H = f\cos\mu - g\cos\lambda; \end{array}\right.$$

so ist:

$$a^2\left(\frac{\cos\lambda^2+\cos\mu^2}{a^2}+\frac{\cos\nu^2}{b^2}\right) = 1+\varepsilon^2\cos\nu^2,$$

$$a^2\left(\frac{X\cos\lambda+Y\cos\mu}{a^2}+\frac{Z\cos\nu}{b^2}\right) = G+\varepsilon^2 Z\cos\nu,$$

$$a^2\left\{\left(\frac{X\cos\mu - Y\cos\lambda}{a^2}\right)^2 + \frac{(Y\cos\nu - Z\cos\mu)^2 + (Z\cos\lambda - X\cos\nu)^2}{a^2b^2}\right\}$$

$$= \frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{b^2} - \frac{\varepsilon^2}{a^2}\left\{H + r\frac{H\cos\omega+(h-G\cos\nu)\sin\omega}{F}\right\}^2;$$

also:

$$7)\quad (1+\varepsilon^2 \cos\nu^2)\frac{x-X}{\cos\lambda}$$

$$=(1+\varepsilon^2 \cos\nu^2)\frac{y-Y}{\cos\mu}$$

$$=(1+\varepsilon^2 \cos\nu^2)\frac{z-Z}{\cos\nu}$$

$$=-G-\varepsilon^2 Z\cos\nu$$

$$\pm a\sqrt{1-\frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{b^2}+\varepsilon^2\left\{\cos\nu^2+\frac{1}{a^2}\left(H+r\frac{H\cos\omega+(h-G\cos\nu)\sin\omega}{F}\right)^2\right\}}.$$

Betrachtet man die Erde als eine Kugel, so ist $\varepsilon=0$, also:

$$8)\quad \frac{x-X}{\cos\lambda}=\frac{y-Y}{\cos\mu}=\frac{z-Z}{\cos\nu}=-G\pm a\sqrt{1-\frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{a^2}},$$

wo a den Halbmesser der Erde bezeichnet.

Welches Zeichen in den vorstehenden Formeln man nehmen muss, wenn der bestimmte Ort die Berührung der beiden Weltkörper wirklich sehen soll, prüft man ganz eben so wie in Cap. V, §. 2, bei äusseren Berührungen, indem man an die Stelle der dortigen X_1, Y_1, Z_1 jetzt nur die obigen X, Y, Z setzt.

§. 3.

Wir wollen jetzt den Ort auf der Erdoberfläche bestimmen, welcher in dem absoluten Zeitmomente, dem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, die Berührung der beiden Weltkörper in seinem Horizonte sieht.

Betrachten wir zuerst die Erde als eine Kugel, so ist die Bedingungsgleichung, aus welcher ω bestimmt werden muss, nach dem vorhergehenden Paragraphen:

$$1-\frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{a^2}=0,$$

woraus sich

$$9)\quad \cos\omega=\frac{a^2-r^2-F^2}{2rF}$$

oder

$$10)\quad \cos\omega=\frac{a^2-r^2-f^2-g^2-h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}{2r\sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}}$$

ergiebt. Auch ist nach einer bekannten trigonometrischen Verwandlung:

$$11)\quad \begin{cases}\cos\frac{1}{2}\omega^2=\dfrac{(a+r-F)(a-r+F)}{4rF}.\\[2ex] \sin\frac{1}{2}\omega^2=\dfrac{(a+r+F)(-a+r+F)}{4rF}.\end{cases}$$

Hat man ω auf diese Weise gefunden, so erhält man x, y, z mittelst der Formeln:

$$12)\quad \begin{cases}x=X-G\cos\lambda,\\ y=Y-G\cos\mu,\\ z=Z-G\cos\nu;\end{cases}$$

oder:

$$13)\quad \begin{cases} x = X - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda, \\ y = Y - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu, \\ z = Z - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu; \end{cases}$$

wo X, Y, Z ihre aus dem Obigen bekannten Werthe haben.

Betrachten wir die Erde als ein Ellipsoid, so haben wir zur Bestimmung von ω die Bedingungsgleichung:

$$0 = 1 - \frac{r^2 + F^2}{b^2} - \frac{2rF}{b^2}\cos\omega$$

$$+ \varepsilon^2 \left\{ \cos\nu^2 + \frac{1}{a^2}\left(H + \frac{rH}{F}\cos\omega + \frac{r(h - G\cos\nu)}{F}\sin\omega\right)^2 \right\}$$

$$= 1 - \frac{r^2 + F^2}{b^2} + \varepsilon^2\left(\cos\nu^2 + \frac{H^2}{a^2}\right) - 2r\left(\frac{F}{b^2} - \frac{\varepsilon^2 H^2}{a^2 F}\right)\cos\omega$$

$$+ \frac{2\varepsilon^2 r H (h - G\cos\nu)}{a^2 F}\sin\omega + \frac{\varepsilon^2 r^2 H^2}{a^2 F^2}\cos\omega^2$$

$$+ \frac{2\varepsilon^2 r^2 H (h - G\cos\nu)}{a^2 F^2}\sin\omega\cos\omega + \frac{\varepsilon^2 r^2 (h - G\cos\nu)^2}{a^2 F^2}\sin\omega^2.$$

Weil aber $\frac{a^2}{b^2} = 1 + \varepsilon^2$ ist, so wird diese Gleichung:

$$14)\quad \begin{cases} 0 = a^2 - (1 + \varepsilon^2)(r^2 + F^2) + \varepsilon^2(H^2 + a^2\cos\nu^2) \\ \quad - 2r\left(F + \varepsilon^2\frac{F^2 - H^2}{F}\right)\cos\omega + \frac{2\varepsilon^2 r^2 H (h - G\cos\nu)}{F}\sin\omega \\ \quad + \frac{\varepsilon^2 r^2 H^2}{F^2}\cos\omega^2 + \frac{2\varepsilon^2 r^2 H (h - G\cos\nu)}{F^2}\sin\omega\cos\omega + \frac{\varepsilon^2 r^2 (h - G\cos\nu)^2}{F^2}\sin\omega^2. \end{cases}$$

Über die Auflösung der Gleichungen von dieser Form ist schon früher das Nöthige bemerkt worden. Hat man ω gefunden, so ergeben sich x, y, z mittelst der Formeln:

$$15)\quad \begin{cases} x = X - \frac{G + \varepsilon^2 Z\cos\nu}{1 + \varepsilon^2\cos\nu^2}\cos\lambda, \\ y = Y - \frac{G + \varepsilon^2 Z\cos\nu}{1 + \varepsilon^2\cos\nu^2}\cos\mu, \\ z = Z - \frac{G + \varepsilon^2 Z\cos\nu}{1 + \varepsilon^2\cos\nu^2}\cos\nu. \end{cases}$$

§. 4.

Um die Zeiten des Anfangs und des Endes der Bedeckung auf der Erde überhaupt und zugleich die Orte zu bestimmen, welche den Anfang oder das Ende sehen, muss man, insofern man die Erde als eine mit dem Halbmesser a beschriebene Kugel betrachtet, auf ganz ähnliche Art wie in Cap. V, §. 5, in der aus dem vorhergehenden Paragraphen bekannten Gleichung

$$1 - \frac{r^2 + F^2 + 2rF\cos\omega}{a^2} = 0$$

die Grösse $\cos\omega = \pm 1$ setzen, was die Gleichung

$$1 - \left(\frac{r \pm F}{a}\right)^2 = 0$$

oder die Gleichung

$$(r \pm F)^2 = a^2$$

giebt, welche, weiter entwickelt, zu den vier Gleichungen

$$r + F = \pm a, \quad r - F = \pm a;$$

oder zu den vier Gleichungen

$$F = \pm a - r, \quad F = \mp a + r$$

führt. Insofern nun aber die Bedeckung des Fixsternes von dem Monde geschieht, also $a > r$ ist, sind die beiden Gleichungen

$$F = -a - r, \quad F = -a + r$$

offenbar ungereimt, weil F im Obigen immer als positiv betrachtet worden ist; und es bleiben also blos die beiden Gleichungen

16) $F = a \mp r$ oder 17) $a \mp r - F = 0$,

d. i. die beiden Gleichungen:

18) $$a \mp r - \sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2} = 0$$

oder

19) $$a \mp r = \sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}.$$

Aus diesen Gleichungen müssen die gesuchten Zeiten bestimmt werden, und ob dieselben dem Anfange oder Ende der Bedeckung entsprechen, wird sich aus ihrer relativen Grösse jederzeit von selbst ergeben. Das obere Zeichen entspricht in der Gleichung 19) dem Werthe $\cos\omega = +1$, das untere dem Werthe $\cos\omega = -1$.

Hat man nun die in Rede stehenden Zeiten gefunden, so ist für $\cos\omega = +1$ nach dem Obigen:

20) $$\left\{\begin{aligned} X &= f + r\frac{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}, \\ Y &= g + r\frac{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}, \\ Z &= h + r\frac{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}; \end{aligned}\right.$$

und für $\cos\omega = -1$ ist:

21) $$\left\{\begin{aligned} X &= f - r\frac{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}, \\ Y &= g - r\frac{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}, \\ Z &= h - r\frac{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}}. \end{aligned}\right.$$

Zur Bestimmung von x, y, z hat man aber die Formeln:

$$22)\quad \begin{cases} x = X - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda, \\ y = Y - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu, \\ z = Z - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu. \end{cases}$$

Führt man in diese Formeln die obigen Werthe von X, Y, Z ein, und lässt in den folgenden Formeln die oberen Zeichen dem Werthe $\cos\omega = +1$, die unteren dem Werthe $\cos\omega = -1$ entsprechen, so erhält man, mit Rücksicht darauf, dass nach dem Obigen

$$\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2} \pm r = a,$$

$$\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2} = a \mp r$$

ist, die folgenden Ausdrücke von x, y, z:

$$23)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a\,\{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}}{a \mp r}, \\[2ex] y = \dfrac{a\,\{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}}{a \mp r}, \\[2ex] z = \dfrac{a\,\{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}}{a \mp r}. \end{cases}$$

Betrachtet man die Erde als ein elliptisches Sphäroid, so hat man sich bei der Auflösung dieser Aufgabe ganz auf ähnliche Art wie in Cap. V, §. 5, zu verhalten, was ich hier der Kürze wegen nicht weiter erläutern will, da das hier einzuschlagende Verfahren von jenem im Allgemeinen durchaus nicht wesentlich verschieden ist.

§. 5.

Wir wollen uns jetzt die Frage vorlegen, welche Orte auf der Erdoberfläche in dem absoluten Zeitmomente, welches wir hier immer in's Auge fassen, eine Berührung der beiden Weltkörper im Meridiane sehen. Diese Frage lässt sich auf folgende Art beantworten.

Wenn nämlich die durch die Gleichungen

$$\frac{x - X}{\cos\lambda} = \frac{y - Y}{\cos\mu} = \frac{z - Z}{\cos\nu}$$

charakterisirte gerade Linie in dem Meridiane irgend eines Ortes auf der Erdoberfläche liegen soll, so muss sie durch die Axe der z gehen, was die Bedingungsgleichung

$$\frac{X}{\cos\lambda} = \frac{Y}{\cos\mu} \quad \text{oder} \quad X\cos\mu - Y\cos\lambda = 0,$$

also nach §. 2 die Gleichung

$$f\cos\mu - g\cos\lambda + r\,\frac{(f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega + \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega}{\sqrt{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2}} = 0,$$

oder die Gleichung

$$\cos\omega + \frac{h-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu}{f\cos\mu-g\cos\lambda}\sin\omega$$

$$=-\sqrt{\frac{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}{r}}$$

giebt. Berechnet man den Hülfswinkel $\bar{\omega}$ mittelst der Formel

$$24)\qquad \tang\bar{\omega}=\frac{h-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)\cos\nu}{f\cos\mu-g\cos\lambda},$$

so ist

$$25)\qquad \cos(\bar{\omega}-\omega)=-\sqrt{\frac{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}{r}}\cos\bar{\omega}.$$

Wie man weiter zu verfahren hat, erhellet aus Cap. V, §. 4.

§. 6.

Wir wollen nun den Ort auf der Erdoberfläche zu bestimmen suchen, der in dem gegebenen absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, eine Berührung der beiden Weltkörper als Maximum der Bedeckung sieht, wobei wir die eigentliche Bedeutung dieses Ausdrucks hier nicht weiter zu erläutern brauchen werden.

Sei (xyz) dieser Ort und Δ^1 die demselben entsprechende scheinbare Entfernung der beiden Weltkörper von einander, so erhält man nach den Lehren der analytischen Geometrie leicht die Formel

$$\cos\Delta^1=\pm\frac{(x-f)\cos\lambda+(y-g)\cos\mu+(z-h)\cos\nu}{\sqrt{(x-f)^2+(y-g)^2+(z-h)^2}}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$26)\qquad x_0=x-f,\quad y_0=y-g,\quad z_0=z-h$$

gesetzt wird, die Formel

$$\cos\Delta^1=\pm\frac{x_0\cos\lambda+y_0\cos\mu+z_0\cos\nu}{\sqrt{x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2}}.$$

Setzen wir ferner der Kürze wegen

$$27)\qquad (1+\varepsilon^2\cos\nu^2)\mathfrak{P}$$

$$=-G-\varepsilon^2 Z\cos\nu$$

$$\pm a\sqrt{1-\frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{b^2}+\varepsilon^2\left\{\cos\nu^2+\frac{1}{a^2}\left(H+r\frac{H\cos\omega+(h-G\cos\nu)\sin\omega}{F}\right)^2\right\}}$$

so ist bekanntlich nach 7)

$$\frac{x-X}{\cos\lambda}=\frac{y-Y}{\cos\mu}=\frac{z-Z}{\cos\nu}=\mathfrak{P},$$

oder:

$$28)\qquad \begin{cases} x=X+\mathfrak{P}\cos\lambda,\\ y=Y+\mathfrak{P}\cos\mu,\\ z=Z+\mathfrak{P}\cos\nu; \end{cases}$$

folglich

$$29)\qquad \begin{cases} x_0 = X - f + \mathfrak{P} \cos \lambda, \\ y_0 = Y - g + \mathfrak{P} \cos \mu, \\ z_0 = Z - h + \mathfrak{P} \cos \nu; \end{cases}$$

und man muss nun auf ähnliche Art wie in Cap. V, §. 6, den Winkel ω so bestimmen, dass

$$\frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{z}} = 0,$$

d. i., weil

$$\frac{d \cos \Delta^1}{d\mathfrak{z}} = - \sin \Delta^1 \frac{d\Delta^1}{d\mathfrak{z}}$$

ist, so, dass

$$\frac{d \cos \Delta^1}{d\mathfrak{z}} = 0$$

ist. Weil nun nach dem Obigen

$$\frac{d \cos \Delta^1}{d\mathfrak{z}} = \pm \frac{d}{d\mathfrak{z}} \left\{ \frac{x_0 \cos \lambda + y_0 \cos \mu + z_0 \cos \nu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\}$$

ist, so muss man ω so bestimmen, dass

$$\frac{d}{d\mathfrak{z}} \left\{ \frac{x_0 \cos \lambda + y_0 \cos \mu + z_0 \cos \nu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}} \right\} = 0$$

ist. Setzen wir aber der Kürze wegen

$$30)\qquad \begin{cases} P = x_0 \cos \lambda + y_0 \cos \mu + z_0 \cos \nu, \\ Q = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}; \end{cases}$$

so muss man ω so bestimmen, dass

$$Q \frac{dP}{d\mathfrak{z}} - P \frac{dQ}{d\mathfrak{z}} = 0$$

ist. Es ist aber nach dem Vorhergehenden

$$P = (X - f) \cos \lambda + (Y - g) \cos \mu + (Z - h) \cos \nu + \mathfrak{P},$$

also, weil nach 4) und einer bekannten Relation

$$(X - f) \cos \lambda + (Y - g) \cos \mu + (Z - h) \cos \nu = 0$$

ist, $P = \mathfrak{P}$. Ferner ist wegen vorstehender Gleichung und nach dem Obigen

$$Q^2 = (X - f)^2 + (Y - g)^2 + (Z - h)^2 + \mathfrak{P}^2.$$

Nach 4) ist aber

$$(X - f)^2 + (Y - g)^2 + (Z - h)^2 = r^2 \frac{\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2}{A^2 + B^2 + C^2},$$

also nach einer bekannten Relation:

$$(X - f)^2 + (Y - g)^2 + (Z - h)^2 = r^2,$$

folglich

$$Q^2 = r^2 + \mathfrak{P}^2, \quad Q = \sqrt{r^2 + \mathfrak{P}^2}.$$

Also ist

$$\frac{dP}{d\mathfrak{T}} = \frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}, \quad Q\frac{dQ}{d\mathfrak{T}} = \mathfrak{P}\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}$$

folglich

$$\frac{dQ}{d\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{P}}{Q}\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} = \frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{r^2+\mathfrak{P}^2}}\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}}.$$

und daher unsere obige Bedingungsgleichung:

$$\sqrt{r^2+\mathfrak{P}^2}\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} - \frac{\mathfrak{P}^2}{\sqrt{r^2+\mathfrak{P}^2}}\cdot\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} = 0,$$

woraus sich leicht

$$r^2\frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} = 0, \quad \text{also} \quad \frac{d\mathfrak{P}}{d\mathfrak{T}} = 0$$

ergiebt. Weil nun aber für einen Fixstern natürlich die Grösse $1 + \varepsilon^2 \cos\nu^2$ constant ist, so kann man, wenn der Kürze wegen

31)
$$\mathfrak{P}_0 = -G - \varepsilon^2 Z\cos\nu$$
$$\pm\, a\sqrt{1 - \frac{r^2+F^2+2rF\cos\omega}{b^2} + \varepsilon^2\left\{\cos\nu^2 + \frac{1}{a^2}\left(H + r\frac{H\cos\omega + (h - G\cos\nu)\sin\omega}{F}\right)^2\right\}}$$

gesetzt wird, die obige Bedingungsgleichung offenbar kürzer unter der Form

32)
$$\frac{d\mathfrak{P}_0}{d\mathfrak{T}} = 0$$

schreiben.

Wie man diese Bedingungsgleichung zur Bestimmung von ω zu benutzen hat, erhellet aus Cap. V, §. 6, mit hinreichender Deutlichkeit, so dass wir hier darüber nichts weiter zu sagen brauchen; jedoch wollen wir den Fall der kugelförmigen Erde jetzt noch einer besonderen Betrachtung unterwerfen.

In diesem Falle ist

33)
$$\mathfrak{P}_0 = -G \pm \sqrt{a^2 - r^2 - F^2 - 2rF\cos\omega},$$

also, wie man leicht findet, da natürlich ω bei der Differention nach $\mathfrak{T}$ hier als constant betrachtet werden muss:

$$\frac{d\mathfrak{P}_0}{d\mathfrak{T}} = -\frac{dG}{d\mathfrak{T}} \pm \frac{F + r\cos\omega}{\sqrt{a^2 - r^2 - F^2 - 2rF\cos\omega}}\cdot\frac{dF}{d\mathfrak{T}},$$

was die Bedingungsgleichung

$$\frac{F + r\cos\omega}{\sqrt{a^2 - r^2 - F^2 - 2rF\cos\omega}} = \mp\frac{dG}{d\mathfrak{T}} : \frac{dF}{d\mathfrak{T}},$$

oder, wenn man quadrirt, die Bedingungsgleichung

$$\frac{(F + r\cos\omega)^2}{a^2 - r^2 + F^2 - 2F(F + r\cos\omega)} = \left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}} : \frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)^2,$$

also die Gleichung

$$(F + r\cos\omega)^2 + 2F\left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}} : \frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)^2 (F + r\cos\omega)$$
$$= (a^2 - r^2 + F^2)\left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}} : \frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)^2$$

giebt, durch deren Auflösung man

$$34)\quad r\cos\omega = -F\left\{1+\left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}}:\frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)^2\right\}$$

$$\pm\left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}}:\frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)\sqrt{a^2-r^2+F^2\left\{1+\left(\frac{dG}{d\mathfrak{T}}:\frac{dF}{d\mathfrak{T}}\right)^2\right\}}$$

erhält, wo bekanntlich

$$35)\quad \left\{\begin{aligned} F &= \sqrt{f^2+g^2+h^2-(f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu)^2}.\\ G &= f\cos\lambda+g\cos\mu+h\cos\nu \end{aligned}\right.$$

ist. Hat man ω gefunden, so erhält man X, Y, Z mittelst der Formeln 4) oder 5) und nachdem man $\mathfrak{P}_0$ mittelst der Formel 33) berechnet hat, die Coordinaten x, y, z des gesuchten Ortes mittelst der Formeln:

$$36)\quad \left\{\begin{aligned} x &= X+\mathfrak{P}_0\cos\lambda,\\ y &= Y+\mathfrak{P}_0\cos\mu,\\ z &= Z+\mathfrak{P}_0\cos\nu. \end{aligned}\right.$$

§. 7.

Soll die Bedeckung für den Punkt (xyz) auf der Erdoberfläche in dem absoluten Zeitmomente, welches wir hier immer ins Auge fassen, central sein, so müssen die Coordinaten x, y, z offenbar aus den Gleichungen

$$37)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-f}{\cos\lambda}=\frac{y-g}{\cos\mu}=\frac{z-h}{\cos\nu},\\ &\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1; \end{aligned}\right.$$

oder aus den Gleichungen

$$38)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-f}{\cos\lambda}=\frac{y-g}{\cos\mu}=\frac{z-h}{\cos\nu},\\ &x^2+y^2+z^2-\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)z^2=a^2; \end{aligned}\right.$$

d. i. aus den Gleichungen

$$39)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-f}{\cos\lambda}=\frac{y-g}{\cos\mu}=\frac{z-h}{\cos\nu},\\ &x^2+y^2+z^2+\varepsilon^2z^2=x^2+y^2+(1+\varepsilon^2)z^2=a^2 \end{aligned}\right.$$

bestimmt werden. Da indess diese Aufgabe in astronomischer Rücksicht kein Interesse haben kann, und überdies die Art und Weise der Auflösung der obigen Gleichungen sich unmittelbar aus Cap. IV ergiebt, so will ich bei diesem Gegenstande nicht länger verweilen.

Allgemeine Schlussbemerkung.

Streng genommen, würde es nun noch nöthig sein, alle im Obigen entwickelten Formeln in den Grössen auszudrücken, durch welche in den astronomischen Tafeln und Ephemeriden die Lage der Weltkörper im Raume gewöhnlich bestimmt wird. Dadurch würden aber, wie es mir scheint, die Formeln an analytischer Einfachheit und Eleganz, so weit dieselbe bei diesem Gegenstande überhaupt zu erreichen ist, eher verlieren als gewinnen. Desshalb will ich mich mit den folgenden wenigen allgemeinen Bemerkungen begnügen.

Was zuerst den in Cap. V behandelten Fall betrifft, so kommt es in demselben eigentlich blos auf die durch f, g, h und f_1, g_1, h_1 bezeichneten Coordinaten der beiden Weltkörper in dem absoluten Zeitmomente, welchem die Sternzeit $\mathfrak{T}$ entspricht, an. Bezeichnen wir aber die Rectascensionen und Declinationen der beiden Weltkörper in diesem Zeitmomente, natürlich auf den Mittelpunkt der Erde bezogen, durch α, δ und α_1, δ_1, und ihre entsprechenden Entfernungen von dem Mittelpunkte der Erde durch ρ und ρ_1; so ist offenbar:

$$1)\quad \begin{cases} f = \rho \cos\alpha \cos\delta, & f_1 = \rho_1 \cos\alpha_1 \mathit{ros}\,\delta_1, \\ g = \rho \sin\alpha \cos\delta, & g_1 = \rho_1 \sin\alpha_1 \cos\delta_1, \\ h = \rho \sin\delta; & h_1 = \rho_1 \sin\delta_1. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ferner die sogenannten Horizontalparallaxen unter dem Äquator für die beiden Weltkörper in dem in Rede stehenden absoluten Zeitmomente durch π und π_1, so ist

$$2)\quad \rho = \frac{a}{\sin\Pi}, \qquad \rho_1 = \frac{a}{\sin\Pi_1};$$

also:

$$3)\quad \begin{cases} f = a\dfrac{\cos\alpha\cos\delta}{\sin\Pi}, & f_1 = a\dfrac{\cos\alpha_1\cos\delta_1}{\sin\Pi_1}, \\ g = a\dfrac{\sin\alpha\cos\delta}{\sin\Pi}, & g_1 = a\dfrac{\sin\alpha_1\cos\delta_1}{\sin\Pi_1}, \\ h = a\dfrac{\sin\delta_1}{\sin\Pi}; & h_1 = a\dfrac{\sin\delta_1}{\sin\Pi_1}. \end{cases}$$

Sind endlich D und D_1 die scheinbaren Halbmesser, so ist

$$4)\quad r = \rho \sin D, \qquad r_1 = \rho_1 \sin D_1:$$

oder

$$5)\quad r = a\frac{\sin D}{\sin\Pi}, \qquad r_1 = a\frac{\sin D_1}{\sin\Pi_1}:$$

wobei es sich von selbst versteht, dass r und r_1 constant sind.

In dem in Cap. VI betrachteten Falle gilt von dem durch die Coordinaten f, g, h seines Mittelpunktes und dem Halbmesser r bestimmten Weltkörper ganz das Nämliche, was wir so eben von demselben

Weltkörper in Bezug auf den ersten Fall gesagt haben. Bezeichnen wir aber in dem in Cap. VI behandelten Falle die constante Rectascension und Declination des Fixsternes durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}$; so ergeben sich die 180° nicht übersteigenden Winkel λ, μ, ν auf der Stelle mittelst der Formeln:

$$6)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \cos\mathfrak{a}\cos\mathfrak{d}, \\ \cos\mu = \sin\mathfrak{a}\cos\mathfrak{d}, \\ \cos\nu = \sin\mathfrak{d}. \end{cases}$$

Dies wären in beiden Fällen die in die im Obigen entwickelten Formeln einzuführenden Grössen, welches wirklich auszuführen wir jedoch aus den angegebenen Gründen unterlassen. Am Einfachsten wird man verfahren, wenn man immer den Halbmesser a des Erd-Äquators als Längeneinheit annimmt.

RELATIONEN.

Erste Classe.

I.

$$f(gh_1 - hg_1) + g(hf_1 - fh_1) + h(fg_1 - gf_1) = 0.$$

$$f_1(gh_1 - hg_1) + g_1(hf_1 - fh_1) + h_1(fg_1 - gf_1) = 0.$$

II.

$$(f - f_1)(gh_1 - hg_1) + (g - g_1)(hf_1 - fh_1) + (h - h_1)(fg_1 - gf_1) = 0.$$

III.

$$\begin{aligned} 0 = \quad & (fg_1 - gf_1)\{(f - f_1)(hf_1 - fh_1) - (g - g_1)(gh_1 - hg_1)\} \\ & + (gh_1 - hg_1)\{(g - g_1)(fg_1 - gf_1) - (h - h_1)(hf_1 - fh_1)\} \\ & + (hf_1 - fh_1)\{(h - h_1)(gh_1 - hg_1) - (f - f_1)(fg_1 - gf_1)\} \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned}
&\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}^2\\
&+\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}^2\\
&+\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}^2\\
=\;&\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}\,\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)_2+(hf_1-fh_1)^2\}.
\end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned}
(f-f_1)(gh_1-hg_1)+(g-g_1)(hf_1-fh_1)&=-(h-h_1)(fg_1-gf_1),\\
(g-g_1)(hf_1-fh_1)+(h-h_1)(fg_1-gf_1)&=-(f-f_1)(gh_1-hg_1),\\
(h-h_1)(fg_1-gf_1)+(f-f_1)(gh_1-hg_1)&=-(g-g_1)(hf_1-fh_1).
\end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned}
&f\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\\
&+g\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\\
&+h\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}\\
=\;&\{f(g-g_1)-g(f-f_1)\}(fg_1-gf_1)\\
&+\{g(h-h_1)-h(g-g_1)\}(gh_1-hg_1)\\
&+\{h(f-f_1)-f(h-h_1)\}(hf_1-fh_1)\\
=\;&-\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}.
\end{aligned}$$

VII.

$$\begin{aligned}
&f_1\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\\
&+g_1\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\\
&+h_1\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}\\
=\;&\{f_1(g-g_1)-g_1(f-f_1)\}(fg_1-gf_1)\\
&+\{g_1(h-h_1)-h_1(g-g_1)\}(gh_1-hg_1)\\
&+\{h_1(f-f_1)-f_1(h-h_1)\}(hf_1-fh_1)\\
=\;&-\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}.
\end{aligned}$$

VIII.

$$\mathfrak{x}=\frac{rf_1-r_1f}{r-r_1},\quad \mathfrak{y}=\frac{rg_1-r_1g}{r-r_1},\quad \mathfrak{z}=\frac{rh_1-r_1h}{r-r_1}.$$

IX.

$$(g-g_1)\,\mathfrak{x}-(f-f_1)\,\mathfrak{y}=-(fg_1-gf_1),$$
$$(h-h_1)\,\mathfrak{y}-(g-g_1)\,\mathfrak{z}=-(gh_1-hg_1),$$
$$(f-f_1)\,\mathfrak{z}-(h-h_1)\,\mathfrak{x}=-(hf_1-fh_1).$$

X.

$$(gh_1-hg_1)\,\mathfrak{x}+(hf_1-fh_1)\,\mathfrak{y}+(fg_1-gf_1)\,\mathfrak{z}=0.$$

XI.

$$\begin{aligned} &\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\,\mathfrak{x}\\ &+\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\,\mathfrak{y}\\ &+\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\}\,\mathfrak{z}\\ =-&\{(fg_1-gf_1)^2+(gh_1-hg_1)^2+(hf_1-fh_1)^2\}. \end{aligned}$$

XII.

$$(\mathfrak{x}-f)(gh_1-hg_1)+(\mathfrak{y}-g)(hf_1-fh_1)+(\mathfrak{z}-h)(fh_1-hf_1)=0,$$
$$(\mathfrak{x}-f_1)(gh_1-hg_1)+(\mathfrak{y}-g_1)(hf_1-fh_1)+(\mathfrak{z}-h_1)(fh_1-hf_1)=0.$$

XIII.

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{x}-f)\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\\ &+(\mathfrak{y}-f)\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\\ &+(\mathfrak{z}-h)\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\} \end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} &(\mathfrak{x}-f_1)\{(g-g_1)(fg_1-gf_1)-(h-h_1)(hf_1-fh_1)\}\\ &+(\mathfrak{y}-g_1)\{(h-h_1)(gh_1-hg_1)-(f-f_1)(fg_1-gf_1)\}\\ &+(\mathfrak{z}-h_1)\{(f-f_1)(hf_1-fh_1)-(g-g_1)(gh_1-hg_1)\} \end{aligned}\right\}=0.$$

XIV.

$$(f-f_1)(\mathfrak{x}-f)+(g-g_1)(\mathfrak{y}-g)+(h-h_1)(\mathfrak{z}-h)=-\frac{r}{r-r_1}E^2,$$
$$(f-f_1)(\mathfrak{x}-f_1)+(g-g_1)(\mathfrak{y}-g_1)+(h-h_1)(\mathfrak{z}-h_1)=-\frac{r_1}{r-r_1}E^2.$$

XV.

$$(\mathfrak{x}-f)^2+(\mathfrak{y}-g)^2+(\mathfrak{z}-h)^2=\left(\frac{rE}{r-r_1}\right)^2,$$
$$(\mathfrak{x}-f_1)^2+(\mathfrak{y}-g_1)^2+(\mathfrak{z}-h_1)^2=\left(\frac{r_1E}{r-r_1}\right)^2.$$

Zweite Classe.

I.

$$fA+gB+hC+D=0,$$
$$f_1A+g_1B+h_1C+D=0.$$

II.

$$(f-f_1)A+(g-g_1)B+(h-h_1)C=0.$$

III.

$$[AB]=A(g-g_1)-B(f-f_1),$$
$$[BC]=B(h-h_1)-C(g-g_1),$$
$$[CA]=C(f-f_1)-A(h-h_1).$$

IV.

$$A[BC]+B[CA]+C[AB]=0.$$

V.

$$\begin{aligned}
&[AB]^2+[BC]^2+[CA]^2\\
=\;& A^2\{(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}-2AB(f-f_1)(g-g_1)\\
&+B^2\{(f-f_1)^2+(h-h_1)^2\}-2BC(g-g_1)(h-h_1)\\
&+C^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2\}-2CA(h-h_1)(f-f_1)\\
=\;& A^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}-A^2(f-f_1)^2-2AB(f-f_1)(g-g_1)\\
&+B^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}-B^2(g-g_1)^2-2BC(g-g_1)(h-h_1)\\
&+C^2\{(f-f_1)^2+(g-g_1)^2+(h-h_1)^2\}-C^2(h-h_1)^2-2CA(h-h_1)(f-f_1)
\end{aligned}$$

$$= \{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\}(A^2+B^2+C^2)$$
$$-\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\}^2,$$

also nach II.:

$$[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2 = E^2(A^2+B^2+C^2).$$

VI.

$$(g-g_1)[AB] - (h-h_1)[CA] = A(g-g_1)^2 - B(f-f_1)(g-g_1)$$
$$+ A(h-h_1)^2 - C(f-f_1)(h-h_1)$$
$$= A\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} - (f-f_1)\{(f-f_1)A + (g-g\ )B + (h-h_1)C\},$$
$$(h-h_1)[BC] - (f-f_1)[AB] = B(h-h_1)^2 - C(g-g_1)(h-h_1)$$
$$+ B(f-f_1)^2 - A(g-g_1)(f-f_1)$$
$$= B\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} - (g-g_1)\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\},$$
$$(f-f_1)[CA] - (g-g_1)[BC] = C(f-f_1)^2 - A(h-h_1)(f-f_1)$$
$$+ C(g-g_1)^2 - B(h-h_1)(g-g_1)$$
$$= C\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} - (h-h_1)\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\};$$

also nach II.:

$$(g-g_1)[AB] - (h-h_1)[CA] = AE^2,$$
$$(h-h_1)[BC] - (f-f_1)[AB] = BE^2,$$
$$(f-f_1)[CA] - (g-g_1)[BC] = CE^2.$$

VII.

$$(f-f_1)[BC] = B(f-f_1)(h-h_1) - C(f-f_1)(g-g_1),$$
$$(g-g_1)[CA] = C(f-f_1)(g-g_1) - A(g-g_1)(h-h_1),$$
$$(h-h_1)[AB] = A(g-g_1)(h-h_1) - B(f-f_1)(h-h_1);$$

also:

$$(f-f_1)[BC] + (g-g_1)[CA] + (h-h_1)[AB] = 0,$$
$$f[BC] + g[CA] + h[AB] = f_1[BC] + g_1[CA] + h_1[AB].$$

VIII.

$$B[AB] - C[CA] = AB(g-g_1) - B^2(f-f_1)$$
$$+ AC(h-h_1) - C^2(f-f_1)$$
$$= A\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\} - (f-f_1)(A^2+B^2+C^2),$$
$$C[BC] - A[AB] = BC(h-h_1) - C^2(g-g_1)$$
$$+ BA(f-f_1) - A^2(g-g_1)$$

$$= B\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\} - (g-g_1)(A^2+B^2+C^2),$$

$$A[CA] - B[BC] = CA(f-f_1) - A^2(h-h_1)$$
$$+ CB(g-g_1) - B^2(h-h_1)$$
$$= C\{(f-f_1)A + (g-g_1)B + (h-h_1)C\} - (h-h_1)(A^2+B^2+C^2):$$

also nach II.:

$$B[AB] - C[CA] = -(f-f_1)(A^2+B^2+C^2).$$
$$C[BC] - A[AB] = -(g-g_1)(A^2+B^2+C^2).$$
$$A[CA] - B[BC] = -(h-h_1)(A^2+B^2+C^2).$$

oder:

$$C[CA] - B[AB] = (f-f_1)(A^2+B^2+C^2),$$
$$A[AB] - C[BC] = (g-g_1)(A^2+B^2+C^2),$$
$$B[BC] - A[CA] = (h-h_1)(A^2+B^2+C^2).$$

IX.

$$\{A[CA] - B[BC]\}^2 + \{B[AB] - C[CA]\}^2 + \{C[BC] - A[AB]\}^2 = E^2(A^2+B^2+C^2)^2.$$

X.

$$\mathfrak{x}[CA] - \mathfrak{y}[BC] = -(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z})(h-h_1) + C\{(f-f_1)\mathfrak{x} + (g-g_1)\mathfrak{y} + (h-h_1)\mathfrak{z}\},$$
$$\mathfrak{y}[AB] - \mathfrak{z}[CA] = -(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z})(f-f_1) + A\{(f-f_1)\mathfrak{x} + (g-g_1)\mathfrak{y} + (h-h_1)\mathfrak{z}\},$$
$$\mathfrak{z}[BC] - \mathfrak{x}[AB] = -(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z})(g-g_1) + B\{(f-f_1)\mathfrak{x} + (g-g_1)\mathfrak{y} + (h-h_1)\mathfrak{z}\}.$$

XI.

$$(\mathfrak{x}-f)[BC] + (\mathfrak{y}-g)[CA] + (\mathfrak{z}-h)[AB] = 0.$$

XII.

$$(\mathfrak{x}-f_1)[BC] + (\mathfrak{y}-g_1)[CA] + (\mathfrak{z}-h_1)[AB] = 0.$$

Dritte Classe.

I.

$$U = (g-g_1)(fg_1 - gf_1) - (h-h_1)(hf_1 - fh_1),$$
$$V = (h-h_1)(gh_1 - hg_1) - (f-f_1)(fg_1 - gf_1),$$
$$W = (f-f_1)(hf_1 - fh_1) - (g-g_1)(gh_1 - hg_1).$$

II.

$$A = U \sin \omega + (g h_1 - h g_1) E \cos \omega,$$
$$B = V \sin \omega + (h f_1 - f h_1) E \cos \omega,$$
$$C = W \sin \omega + (f g_1 - g f_1) E \cos \omega,$$
$$D = \{f g_1 - g f_1)^2 + (g h_1 - h g_1)^2 + (h f_1 - f h_1)^2\} \sin \omega.$$

III.

$$\begin{aligned}
[AB] = & \quad (g-g_1)\, U \sin \omega + (g-g_1)(g h_1 - h g_1) E \cos \omega \\
& - (f-f_1)\, V \sin \omega - (f-f_1)(h f_1 - f h_1) E \cos \omega \\
= & \quad (f g_1 - g f_1)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2\} \sin \omega \\
& - (h-h_1)\{(f-f_1)(g h_1 - h g_1) + (g-g_1)(h f_1 - f h_1)\} \sin \omega \\
& - \{(f-f_1)(h f_1 - f h_1) - (g-g_1)(g h_1 - h g_1)\} E \cos \omega \\
= & - (f g_1 - g f_1)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} \sin \omega \\
& - \{(f-f_1)(h f_1 - f h_1) - (g-g_1)(g h_1 - h g_1)\} E \cos \omega.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[BC] = & \quad (h-h_1)\, V \sin \omega + (h-h_1)(h f_1 - f h_1) E \cos \omega \\
& - (g-g_1)\, W \sin \omega + (g-g_1)(f g_1 - g f_1) E \cos \omega \\
= & \quad (g h_1 - h g_1)\{(g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} \sin \omega \\
& - (f-f_1)\{(g-g_1)(h f_1 - f h_1) + (h-h_1)(f g_1 - g f_1)\} \sin \omega \\
& - \{(g-g_1)(f g_1 - g f_1) - (h-h_1)(h f_1 - f h_1)\} E \cos \omega \\
= & \quad (g h_1 - h g_1)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} \sin \omega \\
& - \{y-g_1)(f g_1 - g f_1) - (h-h_1)(h f_1 - f h_1)\} E \cos \omega,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[CA] = & \quad (f-f_1)\, W \sin \omega + (f-f_1)(f g_1 - g f_1) E \cos \omega \\
& - (h-h_1)\, U \sin \omega - (h-h_1)(g h_1 - h g_1) E \cos \omega \\
= & \quad (h f_1 - f h_1)\{(f-f_1)^2 + (h-h_1)^2\} \sin \omega \\
& - (g-g_1)\{(h-h_1)(f g_1 - g f_1) + (f-f_1)(g h_1 - h g_1)\} \sin \omega \\
& - \{(h-h_1)(g h_1 - h g_1) - (f-f_1)(f g_1 - g f_1)\} E \cos \omega \\
= & \quad (h f_1 - f h_1)\{(f-f_1)^2 + (g-g_1)^2 + (h-h_1)^2\} \sin \omega \\
& - \{(h-h_1)(g h_1 - h g_1) - (f-f_1)(f g_1 - g f_1)\} E \cos \omega;
\end{aligned}$$

also:

$$[AB] = (f g_1 - g f_1) E^2 \sin \omega - \{(f-f_1)(h f_1 - f h_1) - (g-g_1)(g h_1 - h g_1)\} E \cos \omega.$$
$$[BC] = (g h_1 - h g_1) E^2 \sin \omega - \{(g-g_1)(f g_1 - g f_1) - (h-h_1)(h f_1 - f h_1)\} E \cos \omega.$$
$$[CA] = (h f_1 - f h_1) E^2 \sin \omega - \{(g-g_1)(g h_1 - h g_1) - (f-f_1)(f g_1 - g f_1)\} E \cos \omega:$$

oder:

$$\frac{[AB]}{E} = (fg_1 - gf_1) E \sin\omega - \{(f-f_1)(hf_1 - fh_1) - (g-g_1)(gh_1 - hg_1)\} \cos\omega,$$

$$\frac{[BC]}{E} = (gh_1 - hg_1) E \sin\omega - \{(g-g_1)(fg_1 - gf_1) - (h-h_1)(hf_1 - fh_1)\} \cos\omega,$$

$$\frac{[CA]}{E} = (hf_1 - fh_1) E \sin\omega - \{(h-h_1)(gh_1 - hg_1) - (f-f_1)(fg_1 - gf_1)\} \cos\omega.$$

IV.

$$A^2 + B^2 + C^2$$

$$= (U^2 + V^2 + W^2) \sin\omega^2 + \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E^2 \cos\omega^2$$

$$= \{fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E^2 \sin\omega^2$$

$$+ \{fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E^2 \cos\omega^2,$$

also:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E^2.$$

V.

$$A \cos\omega + \frac{[BC]}{E} \sin\omega = (gh_1 - hg_1) E,$$

$$B \cos\omega + \frac{[CA]}{E} \sin\omega = (hf_1 - fh_1) E,$$

$$C \cos\omega + \frac{[AB]}{E} \sin\omega = (fg_1 - gf_1) E.$$

VI.

$$(fA + gB + hC) \cos\omega + \frac{f[BC] + g[CA] + h[AB]}{E} \sin\omega$$

$$= \{f(gh_1 - hg_1) + g(hf_1 - fh_1) + h(fg_1 - gf_1)\} E,$$

$$(f_1A + g_1B + h_1C) \cos\omega + \frac{f_1[BC] + g_1[CA] + h_1[AB]}{E} \sin\omega$$

$$= \{f_1(gh_1 - hg_1) + g_1(hf_1 - fh_1) + h_1(fg_1 - gf_1)\} E:$$

also:

$$(fA + gB + hC) \cos\omega + \frac{f[BC] + g[CA] + h[AB]}{E} \sin\omega = 0.$$

$$(f_1A + g_1B + h_1C) \cos\omega + \frac{f_1[BC] + g_1[CA] + h_1[AB]}{E} \sin\omega = 0;$$

oder:

$$fA + gB + hC = f_1A + g_1B + h_1C$$

$$= -\frac{f[BC] + g[CA] + h[AB]}{E} \tang\omega = -\frac{f_1[BC] + g_1[CA] + h_1[AB]}{E} \tang\omega.$$

VII.

$$fA + gB + hC = f_1 A + g_1 B + h_1 C$$
$$= -\{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2 \sin \omega.$$

VIII.

$$f[BC] + g[CA] + h[AB] = f_1[BC] + g_1[CA] + h_1[AB]$$
$$= \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E \cos \omega.$$

IX.

$$[AB]^2 + [BC]^2 + [CA]^2 = \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E^4.$$

X.

$$(r - r_1)(A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z})$$
$$= \{(rf_1 - r_1 f) U + (rg_1 + r_1 g) V + (rh_1 - r_1 h) W\} \sin \omega$$
$$+ \{(rf_1 - r_1 f)(gh_1 - hg_1) + (rg_1 - r_1 g)(hf_1 - fh_1) + (rh_1 - r_1 h)(fg_1 - gf_1)\} E \cos \omega$$
$$= \{r(f_1 U + g_1 V + h_1 W) - r_1(fU + gV + hW)\} \sin \omega$$
$$= -(r - r_1)\{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} \sin \omega.$$

also:

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} = -\{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} \sin \omega.$$

XI.

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} = -\frac{A^2 + B^2 + C^2}{E^2} \sin \omega = -\left\{\left(\frac{A}{E}\right)^2 + \left(\frac{B}{E}\right)^2 + \left(\frac{C}{E}\right)^2\right\} \sin \omega.$$

XII.

$$\frac{(r - r_1)\{\mathfrak{x}[BC] + \mathfrak{y}[CA] + \mathfrak{z}[AB]\}}{E}$$
$$= \{(rf_1 - r_1 f)(gh_1 - hg_1) + (rg_1 - r_1 g)(hf_1 - fh_1) + (rh_1 - r_1 h)(fg_1 - gf_1)\} E \sin \omega$$
$$- \{(rf_1 - r_1 f) U + (rg_1 - r_1 g) V + (rh_1 - r_1 h) W\} \cos \omega$$

$$= -\{r(f_1U + g_1V + h_1W) - r_1(fU + gV + hW)\} \cos\omega$$

$$= \{(r - r_1)\{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} \cos\omega,$$

also:

$$\mathfrak{x}[BC] + \mathfrak{y}[CA] + \mathfrak{z}[AB] = \{(fg_1 - gf_1)^2 + (gh_1 - hg_1)^2 + (hf_1 - fh_1)^2\} E \cos\omega.$$

Vierte Classe.

I.

$$A = -\{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\sin\omega - (g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\omega,$$

$$B = -\{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\sin\omega - (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\omega,$$

$$C = -\{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega - (f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega,$$

$$D = \{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2\}\sin\omega.$$

II.

$$A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu = 0.$$

III.

$$A^2 + B^2 + C^2 = f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2.$$

IV.

$$fA + gB + hC = -\{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2\}\sin\omega.$$

V.

$$\{AB\} = A\cos\mu - B\cos\lambda,$$

$$\{BC\} = B\cos\nu - C\cos\mu$$

$$\{CA\} = C\cos\lambda - A\cos\nu.$$

VI.

$$\{AB\}\cos\nu + \{BC\}\cos\lambda + \{CA\}\cos\mu = 0.$$

VII.

$$\{AB\} = -(f\cos\mu - g\cos\lambda)\sin\omega + \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\cos\omega,$$

$$\{BC\} = -(g\cos\nu - h\cos\mu)\sin\omega + \{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\cos\omega.$$

$$\{CA\} = -(h\cos\lambda - f\cos\nu)\sin\omega + \{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\cos\omega.$$

VIII.

$$\begin{aligned} &\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2 \\ = \quad & A^2(\cos\mu^2 + \cos\nu^2) + B^2(\cos\lambda^2 + \cos\nu^2) + C^2(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2) \\ & -2AB\cos\lambda\cos\mu - 2BC\cos\mu\cos\nu - 2CA\cos\nu\cos\lambda \\ = \quad & (A^2 + B^2 + C^2)(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2 + \cos\nu^2) \\ & -(A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu)^2 \\ = \quad & A^2 + B^2 + C^2 - (A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu)^2, \end{aligned}$$

also nach II.:

$$\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

und daher nach III.:

$$\{AB\}^2 + \{BC\}^2 + \{CA\}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2.$$

IX.

$$f(g\cos\nu - h\cos\mu) + g(h\cos\lambda - f\cos\nu) + h(f\cos\mu - g\cos\lambda) = 0.$$

X.

$$(f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\nu + (g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\lambda + (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\mu = 0.$$

XI.

$$\begin{aligned} & f\{BC\} + g\{CA\} + h\{AB\} \\ & = \{f^2 + g^2 + h^2 - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)^2\}\cos\omega. \end{aligned}$$

XII.

$$\begin{aligned} & \{AB\}\cos\lambda - \{BC\}\cos\nu \\ & = -\{f\cos\lambda\cos\mu - g(\cos\lambda^2 + \cos\nu^2) + h\cos\nu\cos\mu\}\sin\omega \\ & + \left\{\begin{array}{l} \quad h\cos\lambda - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\cos\nu \\ -f\cos\nu + (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\cos\nu \end{array}\right\}\cos\omega \\ & = (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\omega + \{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\sin\omega, \end{aligned}$$

$$\{BC\}\cos\mu - \{CA\}\cos\lambda$$

$$= -\{f\cos\lambda\cos\nu + g\cos\mu\cos\nu - h(\cos\lambda^2 + \cos\mu^2)\}\sin\omega$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} f\cos\mu - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\cos\lambda \\ -g\cos\lambda + (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\cos\lambda \end{array}\right\}\cos\omega$$

$$= (f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega + \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega,$$

$$\{CA\}\cos\nu - \{AB\}\cos\mu$$

$$= -\{-f(\cos\mu^2 + \cos\nu^2) + g\cos\mu\cos\lambda + h\cos\nu\cos\lambda\}\sin\omega$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} g\cos\nu - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\cos\mu \\ -h\cos\mu + (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\cos\mu \end{array}\right\}\cos\omega$$

$$= (g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\omega + \{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\sin\omega:$$

also, wenn man die drei gefundenen Formeln zusammenstellt:

$$\{AB\}\cos\lambda - \{BC\}\cos\nu$$

$$= (h\cos\lambda - f\cos\nu)\cos\omega + \{g - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\mu\}\sin\omega,$$

$$\{BC\}\cos\mu - \{CA\}\cos\lambda$$

$$= (f\cos\mu - g\cos\lambda)\cos\omega + \{h - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\nu\}\sin\omega,$$

$$\{CA\}\cos\nu - \{AB\}\cos\mu$$

$$= (g\cos\nu - h\cos\mu)\cos\omega + \{f - (f\cos\lambda + g\cos\mu + h\cos\nu)\cos\lambda\}\sin\omega.$$